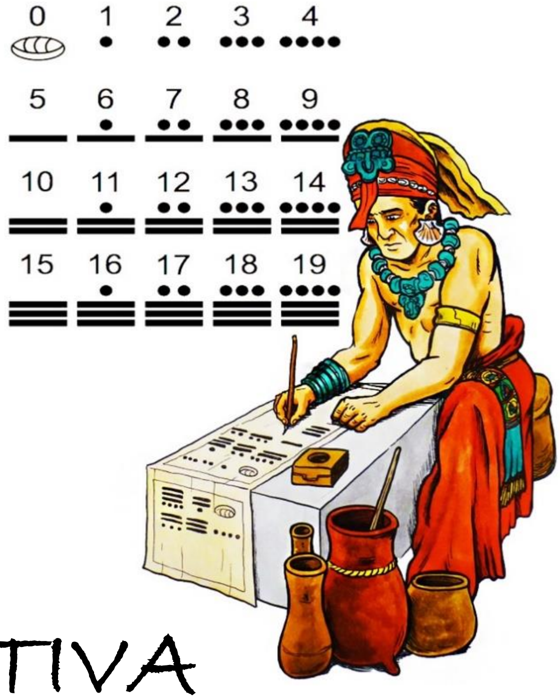
ESCUELA PREPARATORIA ESTATAL Núm. 6
"ALIANZA DE CAMIONEROS"
CLAVE 31EBH0033X
CALLE 64 No. 602 A ENTRE 75 Y 77 TEL. 923-24-11
HORARIO DE 7:00 A 12:30 HORAS DE LUNES A VIERNES; MÉRIDA, YUC. MÉX



Material de OPTATIVA

Cálculo Diferencial

Quinto semestre

Agosto de 2021
Mérida, Yucatán

Compilado por LEM. Martha Rodríguez Z.

Presentación

Bienvenido a la asignatura de **Cálculo Diferencial**, este curso se llevará a cabo de manera **presencial o a distancia**, o sea, se espera que trabajes en el aula con tus compañeros y con el apoyo del docente, pero también se espera que trabajes de manera autónoma aprendiendo en la plataforma a través de lecturas, videos y tareas. Esperamos que la situación mejore cada día y cuando sea necesario podamos regresar a las aulas.

El material se divide en **tres bloques**, cada uno te brinda lecturas, ejemplos y links para consultar vídeos o documentos, también te proporciona actividades y lista de cotejo con información relevante que te ayudará para el buen desarrollo del aprendizaje. Toda la información básica necesaria lo brinda este material y será complementado por mí, tu docente.

Tendrás que trabajar varias **Actividades de Aprendizaje (ADA)** por equipo o de manera individual, por lo que será necesario tener prácticas saludables de convivencia, organización de funciones y calendarización personal y grupal. Cada equipo se conformará con la dirección de tu docente y estará integrado por **5 personas**.

Algunos de los aprendizajes más preciados que deberás demostrar son **los valores éticos**, se espera que trabajes con honestidad, dedicación y respeto, por lo cual será sancionada aquella persona o personas que infrinjan el reglamento escolar, aquellas que entreguen con atraso, o desorganizado, quienes incumplan con los lineamientos, quienes no trabajen con su equipo, quienes copien tareas ajenas, quienes cometan plagio. Las sanciones van desde perder unos puntos, no ser aceptada su tarea, ser excluido de su equipo, ser canalizado a tutorías u orientación escolar hasta ser reportado a la Dirección de la Escuela y perder la calificación total del trabajo. Confío en que al ponerse a prueba tu carácter, no tengamos que vivir dichas experiencias, sino todo lo contrario, que en medio de todo tu proceso de aprendizaje manifiestes un carácter honorable.

Recuerda que serás evaluado a través de ADAs, Actividades integradoras y prueba escrita por lo que de manera continua es necesario que demuestres tus avances y que estés pendiente de los **criterios de evaluación** que se te solicita y que se encuentran con especificaciones en la **lista de cotejo** al final de cada Bloque.

Cada tarea deberá ser entregada en plataforma de Schoology por el representante de equipo con la **nomenclatura apropiada**: ADA#_B#_CD_ Equipo #_primer apellido del representante, observa el siguiente ejemplo:

ADA 1_B1_CD_Equipo 3_ Rodríguez

El **propósito** de la asignatura Cálculo Diferencial es que aprendas a identificar, utilizar y comprender los sistemas de representación del cambio continuo y su discretización numéricas con fines predictivos.

Eje disciplinar	Componentes	Contenidos centrales
Pensamiento y lenguaje variacional	Cambio y predicción: Elementos del Cálculo	• Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales. • Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. • Uso de la derivada en diversas situaciones contextuales. Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales. • Graficación de funciones por diversos métodos Introducción a las funciones continuas y a la derivada de una función. Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.

Te presento en el **Bloque 1** lo que se espera desarrolles durante tu proceso de aprendizaje y los criterios y porcentaje con los que serás evaluado:

Contenido central	Contenidos específicos	Aprendizajes esperados	Productos esperados	Producto Integrador
▪ Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales. ▪ Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites.	▪ ¿Se pueden sumar las funciones? ¿Qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal? ¿una cuadrática con una lineal? ¿se le ocurren otras? ▪ Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. ▪ Teoremas de límites. Aplicación de los diversos tipos de límites de funciones como por ejemplo: indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, límites infinitos y límites en el infinito. ▪ El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, textos, expresión oral, movimiento físico, funciones. ¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo?	1) Opera algebraica y aritméticamente, así como representan y tratan gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas). 2) Emplea los límites en las diferentes situaciones que se les presenta. 3) Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas. 4) Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.	▪ Representar el cambio numérico de patrones de crecimiento en tablas y gráficas. ▪ Establecer conjeturas del tipo ¿cómo serán las sumas de funciones crecientes? ▪ Predecir la situación óptima de un fenómeno de cambio del tipo no lineal y parabólico.	Práctica Evaluativa 50% ADAS 50%

Te presento en el **Bloque 2** lo que se espera desarrolles durante tu proceso de aprendizaje y los criterios y porcentaje con los que serás evaluado:

Contenido central	Contenidos específicos	Aprendizajes esperados	Productos esperados	Producto Integrador
▪ Uso de la derivada en diversas situaciones contextuales. Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.	▪ La derivada como razón de cambio. ▪ ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones representacionales? ▪ ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales? ▪ ¿Qué es el cambio y qué la variación? ▪ ¿Cómo represento el cambio? ▪ Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto. ▪ Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.	5) Reconoce la derivada como razón de cambio. 6) Construye y analiza sucesiones y reconoce patrones de crecimiento y de decrecimiento. 7) Utiliza los diferentes procesos para la derivación.	▪ Estimar lo siguiente: Si una población crece exponencialmente ¿cómo se estima su valor unos años después? ▪ Derivación de orden superior. ▪ Derivadas utilizando la regla de la cadena.	Prueba escrita (bloque 1 y 2) 50% ADAS 50%

Te presento en el **Bloque 3** lo que se espera desarrolles durante tu proceso de aprendizaje y los criterios y porcentaje con los que serás evaluado:

Contenido central	Contenidos específicos	Aprendizajes esperados	Productos esperados	Producto Integrador
▪ Graficación de funciones por diversos métodos Introducción a las funciones continuas y a la derivada de una función. Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.	▪ ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día? ▪ Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada ¿Dónde se crece más rápido? ▪ Encuentra los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión? ¿podrías recortar el papel siguiente esa gráfica?, ¿Qué observas?	8) Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función. 9) Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función. 10) Deriva de manera sucesiva como medio adecuado para la predicción local. 11) Localiza los máximos, mínimos y las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.	▪ Localizar en el plano cartesiano las regiones de crecimiento y de decrecimiento de una función dada en un contexto específico. (considerar deferentes ejemplos) ▪ Calcular el máximo de la trayectoria en el tiro parabólico.	Práctica Evaluativa. 50% ADAS 50%

BLOQUE 1.

INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES

Operaciones con las funciones algebraicas

Gráfica de funciones

Aplicación de los diversos tipos de límites de funciones como por ejemplo: indeterminados del tipo 0 /0 y ∞/ ∞ , límites infinitos y límites en el infinito.

Criterios de evaluación

Práctica Evaluativa	50%
Actividades de aprendizaje	50%

AE1. Opera algebraica y aritméticamente, así como representan y tratan gráficamente a las funciones polinomiales.
Contenidos específicos: Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes.

SESIÓN 1. LEE EL TEXTO Y CONTESTA LAS PREGUUNTAS QUE SE TE HACEN EN LA EVALUACION DIAGNÓSTICA

Introducción

La creación del Cálculo

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

a. Encontrar la tangente a una curva en un punto.
b. Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
c. Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
d. Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

Hombres brillantes de este siglo ofrecieron aportaciones, entre ellos el filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico matemático inglés Isaac Newton. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales *(dy/dx).* No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos.
Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas.

Para trabajar Cálculo será necesario que tengas claro algunos antecedentes, en especial qué características posee una función.

Ver https://www.youtube.com/watch?v=eCB_Jr_VKyg

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

En equipos realizar la actividad grupal determina el dominio, el rango y al menos dos puntos de la gráfica

a) $f(x)=2-x$ b) $f(x)=x^2+1$ c) $f(x)=\sqrt{x}+3$ d) $f(x)=\sqrt{x}-2$

e) $f(x)=x^2-2x+1$ f) $f(x)=x^2+2x+1$ g) $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

i) $f(x)=\frac{1}{3x+1}$ j) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ k) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

SESIÓN 2. TOMA APUNTES DE LA LECTURA Y CONTESTA LA ADA 1.

Relaciones y funciones.

A lo largo de tu vida has relacionado eventos o fenómenos para poder comprender las situaciones, como por ejemplo, cuando se reparten los temas de una exposición en equipo, cuando asignan la posición que tomarán los jugadores de futbol, la distancia que recorre un automóvil al transcurrir el tiempo, la velocidad de un objeto que cae a una altura determinada, etc.; estos eventos suceden debido a que es un mundo cambiante, donde existe un sinfín de magnitudes que varían, como: el tiempo, la posición de la luna, el precio de un artículo, la población, entre otras.
A continuación, se definirán los conceptos principales para desarrollar esta asignatura, como el concepto de relación y función, y la diferencia que hay entre ellos.

Relaciones.
La *relación* entre dos conjuntos es la correspondencia que existe entre los elementos de un primer conjunto llamado dominio, con uno o más elementos de un segundo conjunto llamado contradominio o codominio.
Una relación se puede representar utilizando las siguientes formas:

1. *Mediante un criterio de selección o regla de asociación*, el cual se puede presentar en forma de enunciado o una expresión analítica (fórmula), que explicita la relación entre los elementos de los dos conjuntos.
2. *Mediante un diagrama sagital,* el cual relaciona los elementos de dos conjuntos por medio de flechas.
3. *Mediante un producto cartesiano,* el cual consiste en obtener todos los pares ordenados posibles, cuya primera coordenada es un elemento del primero conjunto y la segunda coordenada es un elemento del segundo conjunto. Si los conjuntos a relacionar son A y B, el producto cartesiano entre ellos se denota como A x B.
4. *Mediante una tabla,* la cual es la organización de los conjuntos en columnas, relacionando así los elementos mediante las filas.
5. *Mediante una gráfica,* la cual es una representación de elementos, generalmente numéricos, mediante líneas, superficies o símbolos, para ver la relación que guardan entre sí.

Funciones.

Una *función (f)* es una relación *especial* en la cual a cada elemento del primer conjunto (x), dominio, le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto (y) contradominio.

Dominio y rango.

En el estudio de las relaciones y las funciones, algunos conceptos deben quedar suficientemente claros para ser utilizados correctamente. Entre ellos se encuentran el concepto de dominio y contradomonio o codominio, mencionados anteriormente, los cuales se definen a continuación.

Dominio (Dom): Es el conjunto de elementos a los que se les aplica la relación.

Contradominio o *codominio*: Es el conjunto al que son enviadas, mediante la relación, los elementos del dominio.

Argumentos: Son los elementos del dominio, es decir, los valores que se toman para construir la relación.

Imágenes: Son los elementos del contradominio o codominio que están asociados con algún argumento.

Rango: Es el subconjunto del codominio o contradominio que contiene a todas las imágenes o valores de la relación.

Ver https://www.youtube.com/watch?v=onh9C8dv9x4

https://www.youtube.com/watch?v=glhFLEZgnrE

Una función f que relaciona a un conjunto X con un conjunto Y se denota de la siguiente forma:

$$\mathbf{f : X \rightarrow Y}$$

Se lee: "función f de X a Y".

Cada elemento del conjunto X le asocia un elemento del conjunto Y mediante la función "f", por lo tanto, se pueden relacionar de forma individual, con **representación sagital**:

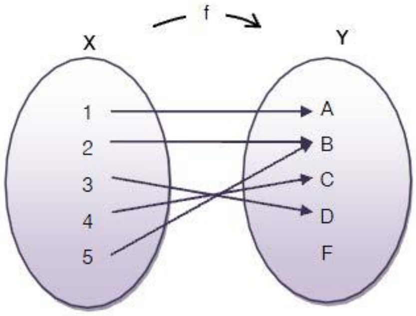
f(1) = A

f(2) = B

f(3) = D

f(4) = C

f(5) = B



En general si se desea relacionar cualquier elemento del dominio con su correspondiente imagen, se denotaría de la siguiente forma:

f(x)=y

Se lee: “f de x es igual a y".

Si se expresa la función como **pares ordenados** se obtiene:

f(x)={(1, A), (2, B), (3, D), (4, C), (5, B)}

También se puede representar la función en forma de **tabla**, como se observa a continuación

x	f(x)
1	A
2	B
3	D
4	C
5	B

Cuando una función está expresada en forma de enunciado se puede escribir su **representación analítica** o viceversa, como en los siguientes ejemplos:

1. Si el enunciado es: “El cubo de un número más cinco”, entonces su representación analítica es: $f(x) = x^3 + 5$
2. Si la representación analítica es $f(m) = \frac{m}{4} - 7$, el enunciado correspondiente es: “la cuarta parte de un número disminuido en 7 unidades”.

Mediante un criterio de selección o regla de asociación.

3. La relación que guarda los precios de los productos.
4. La relación que existe entre los kilómetros que recorre un automóvil con el tiempo que transcurre, si éste se mueve a una velocidad de 95 Km/h y tiene que recorrer 45 Km para trasladarse de Mérida a Chelem.

Ver https://www.youtube.com/watch?v=vjx4i8DkgF4

SESIÓN 3. OBSERVA LAS CARACTERÍSTICAS Y ESCRIBE EJEMPLOS

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

En estudios anteriores has resuelto problemas que se tienen que modelar mediante una expresión algebraica y que pueden ser representados con gráficas para poder darles solución, se construyen modelos de la vida real con funciones.

Para hacer un uso adecuado de las funciones debes poseer habilidades para distinguir sus características, así como también para lograr una mejor interpretación:

- *FUNCIONES*
  - *ALGEBRAICAS*
    - *POLINOMIALES*
      $\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + . . . + a_2x^2 + a_1x + a_0; \quad a_n \neq 0}$
      - *CONSTANTES*: $f(x)=a$
      - *LINEALES*: $f(x)=a\,x + b$
      - *CUADRÁTICAS*: $f(x)=ax^2+bx+c$
      - *CÚBICAS, etc.*: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
    - *RADICALES*
      $\boxed{f(x)=\sqrt[n]{x}}$
    - *RACIONALES*
      $\boxed{f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \quad si \quad q(x)\neq 0, \quad dónde \quad p(x) \; y \; q(x) \; son \; polinomios}$
  - *TRASCENDENTES*
    - *TRIGONOMÉTRICAS*
      $$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x \\ \cos x \\ \tan x \\ \cot x \\ \sec x \\ \csc x \end{cases}$$
    - *EXPONENCIALES*
      $\boxed{f(x)=a^x \quad donde \quad a \succ 0, \quad a \in R}$ $\boxed{f(x)=e^x}$
    - *LOGARITMICAS*
      $f(x)=\log_a x$
      $f(x)=Ln\,x=\ln x$
      $f(x)=\log x$

Funciones algebraicas

Son aquellas funciones que están compuestas por términos algebraicos mediante operaciones como la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces.

Las funciones algebraicas se dividen en *polinomiales, racionales e irracionales*.

A continuación, se definen cada una de ellas:

a. Funciones Polinomiales.

Estas funciones tienen como forma general la siguiente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde a representa a las constantes y n es un número no negativo.

El dominio de las funciones son aquellos valores que pueden sustituirse en la función y donde ésta sea verdadera, por tanto, el dominio de las funciones polinomiales es el conjunto de los números reales.

Ver: https://www.youtube.com/watch?v=FivdryOMLZ8
https://www.youtube.com/watch?v=M6A7wbmkK2s
https://www.youtube.com/watch?v=YnC4KtjGijw
Función cuadrática https://www.youtube.com/watch?v=Ql8L09-HsI0
En general: https://www.youtube.com/watch?v=pg5NeSHjgm0
Función a trozos: https://www.youtube.com/watch?v=AU1GVkYD78w
Función valor absoluto: https://www.youtube.com/watch?v=EpiXKxekdrw

b. Funciones irracionales

Se expresa como la raíz de una función polinomial.

$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, con $P(x) \geq 0$

Ver https://www.youtube.com/watch?v=GicNW6V9CeU

c. Funciones racionales

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales, o sea,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, donde\ , Q(x) \neq 0$$

Ver https://www.youtube.com/watch?v=KnQDII6zSHY

Asíntotas https://www.youtube.com/watch?v=fuvLZau_K5E&t=522s

Funciones trascendentes

Las funciones trascendentes se dividen en: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Función trigonométrica https://www.youtube.com/watch?v=VxSyRH_sWwU

Función exponencial https://www.youtube.com/watch?v=A2N0CW_AL-Y

https://www.youtube.com/watch?v=JulYyOS0hH4

Función logarítmica https://www.youtube.com/watch?v=QaKvQAOefdU

SESIÓN 4. RETROALIMENTACIÓN DE LA PARTE 1 DE LA ADA1

AE1. Opera algebraica y aritméticamente, así como representan y tratan gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).

Contenidos específicos: ¿Se pueden sumar las funciones? ¿Qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal? ¿una cuadrática con una lineal? ¿se le ocurren otras?

SESIÓN 1 y 2 Observa los ejemplos de funciones que se obtienen de la aplicación de operaciones con otras funciones.

OPERACIONES CON FUNCIONES.

Si ***f*** y ***g*** son dos funciones cuyos valores funcionales son $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$ y sus respectivos dominios representados son D_f y D_g se pueden realizar operaciones de suma, diferencia, producto y cociente, resultando una nueva función, con un nuevo dominio.

a. *Función suma:*

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función f + g está definida por: (f + g) (x) = f(x) + g(x) , por lo que el dominio de f + g es $D_f \cap D_g$,

O sea, $s= f + g= \{ (x, s(x)/S(x)= f(x) + g(x), x \in D_f \cap D_g.\}$

Ejemplo:

1. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ Entonces $(f + g)(x) = x + \sqrt{x}$.
El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$.
Así el dominio de f + g es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$.

2. Sea $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x$. Si x = 3, entonces $f(3) = (3)^3 - 1 = 26$ y $g(3) = 4(3) = 12$.
Así, (f + g) (3) = f(3) + g(3) = 26 – 12 = 14.

b. Función producto:

Sean f y g dos funciones y D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente.
La función f · g está definida por (f · g) (x) = f(x)· g(x), por lo que, el dominio de f · g es $D_f \cap D_g$.

O sea, $p = f*g = \{(x, p(x)) / p(x) = f(x)* g(x), x \in D_f \cap D_g\}$

Ejemplo:

1. Sea $f(x) = x – 2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces $(f\cdot g)(x) = f(x)\, g(x) = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.
   El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, \infty)$.
   Por tanto, el dominio de $f \cdot g$ es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$.

2. Sea $f(x) = |x|$ y $g(x) = 5$. Entonces $(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x) = |x|\cdot 5$.
   El dominio de f es R y el dominio de g es 5. Entonces el dominio de $f \cdot g$ es $D_f \cap D_g$
   Si $x = -2$, entonces $(f \cdot g)(-2) = f(-2) \cdot g(-2) = |-2|5 = 2\cdot 5 = 10$.

c. Función cociente:

Sean f y g dos funciones y D_f , D_g sus dominios respectivamente.

Entonces la función f/g está definida por: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$ El dominio de f /g es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

Ejemplo

Si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2 – 1$. Entonces $(f/g)(x) = f(x) / g(x) = (x + 4)/(x^2 – 1)$.

El dominio de f y el de g son los números reales. La función $g(x) = x^2 – 1$ es cero para $x = 1$ y $x = -1$.

Por lo tanto, el dominio de f/g es R – {-1, 1}

d. Composición de funciones

Sabemos que la notación “g(a)” significa el valor de la función g(x) cuando x = a; y se obtiene al sustituir a por x, siempre que x aparezca en la expresión de g(x).

Por ejemplo, si $g(x) = x^3 + 2$, entonces $g(a) = a^3 + 1$;

Si f(x) es una función, entonces g(f(x)) es la función que se obtiene al sustituir f(x) en lugar de x, siempre que ésta ocurra en la expresión de g(x).

La función g(f(x)) es llamada la compuesta de g con f y se utiliza el símbolo operacional o para denotar la compuesta de g con f. Así $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 2$, entonces

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 2)^2$.

¿Cuál es el dominio de g o f?

Es muy importante hacer notar que para formar la función composición es necesario que el rango de la función f sea igual o un subconjunto del dominio de la función g.

Ejemplo

1. Sea f(x) = x + 3 y g(x) = $2x$ + $\sqrt{x}$. Encuentre g∘f y especifique su dominio.

Solución:

Por las definiciones de g∘f, f y g, tenemos que (g∘f) (x) = g (x + 3) = 2(x + 3) +$\sqrt{x} + 3$

El dominio X de f es el conjunto de todos los números reales.

Sin embargo (g∘f) (x) es un número real sólo si x ≥ -3.

Por lo tanto, el dominio de g∘f es el intervalo [-3, ∞).

2. Sean f(x) = $\sqrt{x}$ y g(x) = 2x – 3. Encuentre (f∘g) (x), (g∘f)(x) y sus dominios.

Solución:

Por las definiciones de $f \circ g$, $g \circ f$, f y g tenemos (f∘g)(x) = f(g(x)) = f(2x – 3) = $\sqrt{2x - 3}$

El dominio de g es (-∞, ∞), y el dominio de f es [0, ∞).

El dominio de f∘g es el conjunto de números reales para los cuales 2x – 3 ≥ 0, o,

equivalentemente [3/2, ∞).

De la misma forma (g∘f)(x) = g(f(x)) = g($\sqrt{x}$) = 2$\sqrt{x}$ −3

El dominio de g∘f es el conjunto de números reales para los cuales x ≥ 0, es decir [0, ∞).

Nótese que fog puede ser una función diferente a g∘f.

Ver:

https://www.youtube.com/watch?v=84_EhqnX3TA

https://www.youtube.com/watch?v=0mpzvICzfKM

https://www.youtube.com/watch?v=zk2rDBqwpjg&list=RDCMUCvTyXJuQyAqG2UxzI8jtc2g&index=1

SESIÓN 3 y 4, será día inhábil.

Actividad de Aprendizaje 1 Bloque 1 Sem: V

Nombre: ________________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** _____________

Contenidos	Funciones. Dominio. Rango. Clasificación de funciones Operaciones con funciones
Aprendizajes esperados	AE. Opera algebraica y aritméticamente, así como representan y tratan gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).
Competencias Disciplinares	1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Atributos de las competencias genéricas	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas. (Atributo: 4.1) 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6) 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3) 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1) 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3

I. Realiza una investigación para contestar correctamente las siguientes proposiciones y completar la tabla de manera individual y posteriormente compara con los integrantes de tu equipo y consensen:

a) ¿Qué es una función?,

b) ¿Cuál es el símbolo o notación de una función?

c) ¿Cuáles son las formas de la representación de una función (escrita y gráfica)?

d) Brinda 3 ejemplos de expresiones que no son funciones usando el criterio de la vertical

Función	Notación	Dominio	Rango	Bosquejo de gráfica
Constante				
Lineal				
Cuadrática				
Cúbica				
Racional				
Irracional				

II. Contesta para cada una de las variadas cuestiones:

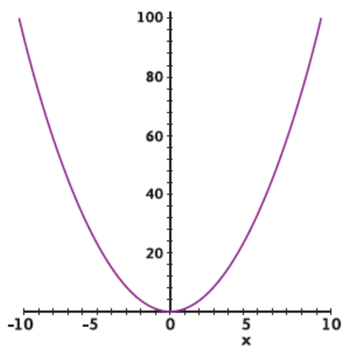
1.- Observa el siguiente conjunto de pares ordenados {(1,11), (1,21), (1,31), (1,41)}

a) ¿Es función o relación? ______________________ b) ¿Por qué? ___________________________

c) ¿Cuál es su dominio? ______________________ d) ¿Cuál es su rango? ____________________

e) ¿Qué tipo de representación tiene? ________________________________

2.- Dada la siguiente gráfica:



a) ¿Es función o relación? _____________

b) ¿Por qué? _______________________

c) ¿Cuál es su dominio? ______________

d) ¿Cuál es su rango? ________________

e) ¿Qué tipo de representación tiene?

____

3.- Observa la siguiente tabla y resuelve

Nombre	**Edad**
Eugenia Aguilar	19
Elda Meléndez	16
Martha Rodríguez	19
Eunice Zapata	17
Dara Fuentes	15
Roberto Lara	20

a) ¿Es función o relación? _________________

b) ¿Por qué? _______________________________________

c) ¿Cuáles su dominio? ______________________________

d) ¿Cuál es su rango? ________________________________

e) ¿Qué tipo de representación tiene? __________________

4.- De acuerdo con la expresión algebraica, $f(x)= 4x+2$, contesta.

a) ¿Es función o relación?_________________b) ¿Por qué?______________________________

c) ¿Cuál es su dominio?___________________d) ¿Cuál es su rango?_______________________

e) ¿Qué tipo de representación tiene? ________________________________

III. En equipo, resuelve el Ejercicio 4 (**números primos**) del libro de Cálculo de CONAMAT pag 28, que consiste en hallar el dominio, rango, y el trazo de la gráfica de cada función presentando los procesos o explicaciones.

Expresión Analítica	Dominio	Rango	Gráfica

IV. Realiza las operaciones en los ejercicios 11 al 13 del Ejercicio 9 de la pág. 40 DE CONAMAT.

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 1	ADA 1 Valor: 20 puntos
GRADO y GRUPO:	FECHA:	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
a. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. b. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente c. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA d. El nombre del archivo será CalDif_B1_ADA 1_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B1_ADA1_Equipo3 e. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		*La entrega fuera de fecha será penalizada con 2 puntos. Teniendo como fecha máxima el día inmediato posterior a la fecha establecida. *No entregar lista de cotejo causa una penalización de 1 punto
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	0.5		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	0.5		
Contenido			
I.Presenta una breve explicación al identificar correctamente unos conceptos básicos y completar la tabla de funciones	3		
II.Identifica el tipo de relación, tipo de representación, dominio y rango.	4		
III.Utilliza los conceptos para presentar el dominio y rango en diversas funciones algebraicas	5		
IV. Realiza correctamente las operaciones con funciones y halla el dominio de la nueva función	5		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	0.5		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	0.5		
Total	**20**		

Nombre del Equipo:	**Nombre del Representante:**

Integrantes del equipo	**Firma de conformidad con el resultado**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	**Preformal 0-59**	**Receptivo 60-69**	**Resolutivo 70-79**	**Autónomo 80-89**	**Estratégico 90-100**

AE 2.Emplea los límites en las diferentes situaciones que se le presentan.
Contenidos específicos: Teoremas de límites. Aplicación de los diversos tipos de límites de funciones como, por ejemplo: indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, límites infinitos y límites en el infinito. Factorizando Límite por evaluación

SESIÓN 1. Observa la definición de límite al utilizar una técnica de estudio.

LÍMITES

Supongamos que se te pide trazar la gráfica de la función *f* dada por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad x \neq 1.$$

Para todos los valores diferentes de *x* = 1, es posible aplicar técnicas estándares de trazado de curvas. Pero en *x* = 1 no resulta claro que pueda esperarse, debido que en ese valor la función no está bien definida. Para darnos una idea del comportamiento de la gráfica de *f* cerca de *x* = 1, se pueden utilizar dos conjuntos de valores de *x;* uno que se aproxime a 1desde la izquierda y otro que se acerque a 1 desde la derecha, como se muestra en las tablas:

x tiende a 1 por la izquierda → ← x tiende a 1 por la derecha

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.710	2.970	2.9970	2.9997	?	3.0003	3.003	3.030	3.310

$f(x)$ tiende a 3 → ← $f(x)$ tiende a 3

Cuando se traza la gráfica de la función, parece que la gráfica de *f* es una parábola que tiene una abertura en el punto (1,3), como se muestra en la Fig. 2.1.

Aunque *x* no puede ser igual a 1, puedes acercarte por la izquierda o por la derecha y, como resultado, f (x) se mueve, cerca de 3. Si utilizas la notación de límites, se puede escribir:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 .$$

Esto se lee “el límite de f (x), cuando x tiende a 1, es 3”

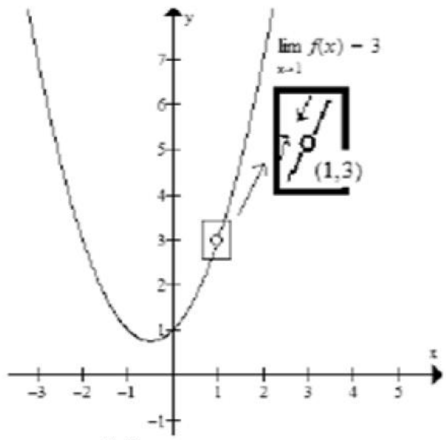


Fig. 2.1 El límite de $f(x)$, cuando x tiende a 1, es 3.

Si **f(x)** se acerca a un número **L** cuando **x** se aproxima a un número **c** desde cualquiera de los dos lados, **el límite de f(x), cuando x tiende a c, es L.**

Este límite se escribe como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Utilizaremos la notación de $x \to c^-$ para indicar que x tiende al valor c, por la izquierda

Y utilizaremos la notación de $x \to c^+$ para expresar que x tiende al valor c por la derecha.

De esta manera definiremos los límites unilaterales:

L, es el límite de f por la izquierda cuando x tiende a c por la izquierda y lo representamos como:

$$\lim_{x \to c-} f(x) = L$$

L, es el límite de f por la derecha cuando x tiende a c por la derecha y lo representamos como:

$$\lim_{x \to c+} f(x) = L$$

Por lo tanto, si los límites unilaterales tienen un valor común L:

$$\lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x) = L ,$$

Se dice entonces que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe

En caso contrario cuando los límites unilaterales no coinciden al mismo valor, se dice que el límite no existe y se representa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \nexists$$

Como habrás notado los límites son usados para describir cómo se comporta una función cuando la variable independiente x se mueve alrededor de ciertos valores.

Ver https://www.youtube.com/watch?v=voeUOct5VjY
https://www.youtube.com/watch?v=o334wYiRDcw

Apliquemos el aprendizaje para cada una de las siguientes funciones, aproxima el valor del límite solicitado empleando un procedimiento tabular. Utiliza las tablas que se te incluyen para vaciar tus resultados y concluye respecto a lo observado.

a. Determina $\lim_{x \to 5}(3x^2 + 7x - 1) =$

$\boldsymbol{x}$	2	4.5	4.8	4.9	4.95	5.15	5.2	5.4	6
$\boldsymbol{f(x)}$									

b. Determina $\lim_{x \to -3}(4x^3 - 2x^2 + 5x) =$

$\boldsymbol{x}$	-5	-4	-3.5	-3.3	-3.2	-3.1	-2.9	-2.7	-2.6
$\boldsymbol{g(x)}$									

c. Para $m(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, determina $\lim_{x \to 0} m(x)$

$\boldsymbol{x}$									
$\boldsymbol{m(x)}$									

____
____

d. Para $p(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$, determina $\lim_{x \to -3} p(x)$

$\boldsymbol{x}$									
$\boldsymbol{p(x)}$									

____
____

e. Para $r(t) = \frac{8}{t^2}$, determina $\lim_{t \to 0} r(t)$

$\boldsymbol{t}$									
$\boldsymbol{r(t)}$									

____
____

f. Para $g(s) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$, determina $\lim_{s \to 3} g(s)$

s									
$g(s)$									

PROPIEDADES	
El límite de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de los límites de cada una de las funciones	$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to \infty} f(x) \pm \lim_{x \to \infty} g(x)$
El límite de un producto de funciones es el producto de los límites de cada una de las funciones	$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim_{x \to \infty} g(x)$
El límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites de cada una de las funciones	$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \infty} f(x)}{\lim_{x \to \infty} g(x)}$
El límite del producto de una función por un número real es el producto del número por el límite de la función	$\lim_{x \to \infty} \left(k \cdot f(x)\right) = k \cdot \lim_{x \to \infty} f(x)$
El límite de una función constante coincide con el valor de la constante	$\lim_{x \to \infty} k = k$
El límite de la potencia de dos funciones es el valor de la potencia de sus límites	$\lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} f(x)^{\lim_{x \to \infty} g(x)}$

Ver https://www.youtube.com/watch?v=PZhTK99o1pk

https://www.youtube.com/watch?v=roR48O4gFSM

SESIÓN 2. Observa los ejemplos y toma nota. Escribe dos ejercicios basándote en ellos.

FORMA IDETERMINADA.

Del tipo 0 / 0

Usando factorización

Halla $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Como el numerador y el denominador son polinomios, entonces son funciones continuas, por lo que sus límites pueden calcularse evaluando, es decir

$$\lim_{x \to -2} x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$
$$\lim_{x \to -2} x + 2 = -2 + 2 = 0$$

Puesto que el límite del denominador es cero, no podemos evaluar el límite del cociente como el cociente de los límites, sin embargo, el límite puede calcularse observando que

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = x - 2 \qquad \text{si } x \neq -2$$

De donde $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} x - 2 = -2 - 2 = -4$

SESIÓN 3. Observa las características y presenta dos ejemplos basándote en ellos.

LIMITE EN EL INFINITO.

Al momento de calcular los límites para una función en el infinito se tienen que aplicar ciertos criterios en la función, los cuales son los siguientes:

Nos piden hallar el límite al infinito de

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}$$

1. Dividimos cada término del numerador y del denominador por la potencia más grande de x que aparezca en la función, en este caso dividimos cada término del numerador y denominador en x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{5x^3}{x^4}+\frac{4x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{6}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}+\frac{8x^3}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{8x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}$$

2. Reducimos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{6}{x^4}}{6+\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{10}{x^4}}$$

3. Y aplicamos el teorema de $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$ entonces todos los términos divididos entre x se harán 0;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\cancel{\frac{5}{x}}^{\,0}+\cancel{\frac{4}{x^2}}-\cancel{\frac{3}{x^3}}+\cancel{\frac{6}{x^4}}}{6+\cancel{\frac{8}{x}}-\cancel{\frac{4}{x^2}}+\cancel{\frac{8}{x^3}}+\cancel{\frac{10}{x^4}}}$$

Por lo tanto $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ver https://www.youtube.com/watch?v=o334wYiRDcw

SESIÓN 4.

Actividad de Aprendizaje 2. Bloque 1 Sem: V

Nombre: ________________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** _____________

Contenidos	Concepto de límites. Limites por evaluación, Límites indeterminados. Límites que tienden al infinito
Competencias Disciplinares	1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Atributos de las competencias genéricas	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.(Atributo: 4.1) 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6) 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3) 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1) 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3

Instrucciones :

1. Realiza “Límites por evaluación” del ejercicio 17 (# primos) y comparte con tus compañeros los resultados de la pág. 64 DE CONAMAT Consulta tus respuestas en la pág. 219 (Autoevaluación). Apóyate de videos
2. Realiza “Límites indeterminados” del ejercicio 18 (# primos del 1 al 15) y comparte con tus compañeros los resultados de la pág. 68 DE CONAMAT Consulta tus respuestas en la pág. 219 (Autoevaluación)
3. Realiza “límites cuando tiende al infinito” del ejercicio 19 (# primos del 1 al 15) y comparte con tus compañeros los resultados de la pág. 72 DE CONAMAT Consulta tus respuestas en la pág. 219 (Autoevaluación)

Referencias

Bibliográficas

Aguayo, Daniel. Experimentando el Cálculo Diferencial. 2010. México. Pág. 46-48, 52-53.
Ortiz, Francisco. Cálculo Diferencial. Grupo Editorial Patria. Límites. ” pág. 88 – 96, 99, 105
CONAMAT. Cálculo Diferencial. Pearson. Pág. 63- 72, 219

En Web

Noción de límite: https://www.youtube.com/watch?v=eCB_Jr_VKyg
Noción de sucesión finita: Una pelota se suelta a 18m y rebota un tercio” que te presenta la docente y que se halla en https://www.youtube.com/watch?v=MJXuHb44biE
Límites algebraicos. https://www.youtube.com/watch?v=4fyHnnmZxvk
https://www.youtube.com/watch?v=kbdoSNNC2Rg
Límites al infinito: https://www.youtube.com/watch?v=P4Ui8wukDK0
Limites infinitos: https://www.youtube.com/watch?v=fHWpGPnequE
Limites en una gráfica https://www.youtube.com/watch?v=EYcwxYab0Qk
https://www.youtube.com/watch?v=Lg9fOAgpkOw&t=66s

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 1	ADA 2 Valor: 30 puntos
GRADO y GRUPO:	FECHA:	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
a. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. b. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente c. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA d. El nombre del archivo será CalDif_B1_ADA 2_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B1_ADA2_Equipo3 e. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		*La entrega fuera de fecha será penalizada con 2 puntos. Teniendo como fecha máxima el día inmediato posterior a la fecha establecida. *No entregar lista de cotejo causa una penalización de 1 punto
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	0.5		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	0.5		
Contenido			
I.Presenta una breve explicación o procedimientos al resolver correctamente “Límites por evaluación” del ejercicio 17 (# primos)	9		
II Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver “Límites indeterminados” del ejercicio 18 (# primos del 1 al 15).	9		
III. Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver “límites cuando tiende al infinito” del ejercicio 19 (# primos del 1 al 15)	9		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	0.5		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	0.5		
Total	**30**		

Nombre del Equipo:	**Nombre del Representante:**

Integrantes del equipo	**Firma de conformidad con el resultado**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	**Preformal 0-59**	**Receptivo 60-69**	**Resolutivo 70-79**	**Autónomo 80-89**	**Estratégico 90-100**

METACOGNICIÓN

Excelente = Logré el aprendizaje de manera independiente.

Bueno = Necesité ayuda para construir mi aprendizaje.

Regular = Fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente

	Criterios	Niveles de desempeño		
		Excelente	Bueno	Regular
Procedimental	Identificas tipos y características de las funciones			
	Haces la diferenciación entre los dominios de funciones			
	Resuelves operaciones con funciones y hallas el dominio			
	Utilizas adecuadamente el concepto de razón de cambio			
	Utilizas adecuadamente el concepto de límite			
	Utilizas y aplicas el concepto de límite por evaluación			
	Utilizas y aplicas el concepto de límite indeterminado y al infinito			
Actitudinal	Organizas tu horario de trabajo			
	Organizas la información e investigas los temas			
	Te interesas en ver los videos y las lecturas por el bien individual y colectivo			
	Valoras el trabajo en equipo aportando y refutando ideas en la resolución de problemas.			
	Cumples con las indicaciones dadas para el buen desarrollo de las actividades.			
	Buscas y sugieres soluciones a los problemas planteados.			

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 1	Evidencia: Problemario Valor: 50_ puntos
GRADO y GRUPO: 3ero optativa	FECHA:	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
f. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. g. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology h. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA i. El nombre del archivo será CalDif_B1_Problemario_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B1_Problemario_Equipo3 El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras	2		1. Al calificar, el docente elegirá al azar un trabajo de cada carpeta. 2. La calificación obtenida en dicho problemario será asignada a todos los integrantes del equipo. 3. Imprimir e incluir en la carpeta esta lista de cotejo, si no se cumple no se calificará.
1. La portada impresa pegada a la carpeta contiene los siguientes datos: a) Nombre y logo de la escuela. b) Nombre de la materia. c) Nombre del problemario. d) Fecha de entrega. e) Nombre del maestro. f) Grado y Grupo g) Nombre de los integrantes del equipo ordenado alfabéticamente por apellidos	2		
Contenido			
2. Los 20 problemas de este problemario son del libro Cálculo Diferencial de CONAMAT.	40		4. Cada ejercicio tiene un valor de 2 puntos

Ejercicios	Página	Tema
6	9	Evaluación
4, 12 y 18	12	Dominio
1, 4 y 19	28	Graficación
4 y 6	29	Graficación
3a, 3b, 3c y 3d	40	Suma, resta, producto y división de funciones

1, 5, 11	64	Límite por evaluación			
4 y 12	68	Límites indeterminados			
4 y 14	72	Límite cuando tiende al infinito			
5. Los problemas deben incluir: a) Enunciado del problema con tinta negra o azul. b) Procedimiento nítido c) El Resultado con tinta negra o azul y encerrado con tinta roja. d) Los problemas son resueltos en hojas numeradas			2		
Participación y actitudes					
Participan de manera activa durante la elaboración de la actividad.			2		
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.			2		
Total			**50**		

Nombre del Equipo:	**Nombre del Representante:**

Integrantes del equipo	**Firma de conformidad con el resultado**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	**Preformal 0-59**	**Receptivo 60-69**	**Resolutivo 70-79**	**Autónomo 80-89**	**Estratégico 90-100**

BLOQUE 2.

LA DERIVADA

La derivada como razón de cambio.

Patrones de crecimiento y de decrecimiento.

Técnicas de derivación

Criterios de evaluación

Prueba escrita 50%

Actividades de aprendizaje 50%

AE5.Reconoce la derivada como razón de cambio. Derivación de funciones algebraicas
Contenido específico. La derivada como razón de cambio.

SESIÓN 1. Realiza la lectura y utiliza una técnica de estudio para presentar las ideas principales.

Introducción

Hemos visto las **razones de cambio y las relacionarás con el concepto de derivada** que junto con el concepto de límite son la base del **Cálculo Diferencial.**

Hay muchas situaciones en las que necesitamos conocer una diferencia (incremento) o tal vez un cociente (razón).
Los incrementos son variaciones en las variables donde la letra Δ los representa de manera simbólica.
De esta manera Δx es la variación que se produce en x, o sea $\Delta x = x_2 - x_1$.
Y por consiguiente para hallar Δy, basta con encontrar la variación, $\Delta y = y_2 - y_1$

Con base en lo anterior la **razón de cambio** (el cociente) es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Existen variadas aplicaciones de la noción de razón de cambio. Por ejemplo: el índice de crecimiento de la población de una ciudad, la tasa (razón de cambio) de desempleo, la tasa de producción en una fábrica, la tasa de mortandad por desnutrición, tasa de nacimientos de varones, etc.
Las razones de cambio que más usamos son las que se relacionan con el tiempo, sin embargo, investigaremos la razón de cambio respecto de cualquier variable. Te proporciono tres ejemplos del uso de las razones el primero es con respecto al crecimiento de microrganismos, usando de manera simple la aritmética, el segundo ejemplo es utilizando concepto de velocidad en física y por último usando el concepto de pendiente de una recta secante de Geometría, todo esto como antecedente para la conceptualización de razón de cambio.

Observa el siguiente ejemplo en aritmética:

1. Mario y Eunice realizan un experimento, registraron que a las 8 hrs., había 2000 microorganismos en una muestra, a las 13hrs., había 12000 bacterias. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población de microorganismos con respecto al tiempo?

Solución:

Considerando "t" el tiempo en horas, y "p(t)" la población de microorganismos en ese tiempo, entonces

El incremento del tiempo, o variación del tiempo se halla $\Delta t = 13 - 8$ = 5

El incremento o variación de microorganismos se halla $\Delta p = 12000 - 2000$= 10000

Por lo tanto, $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{12000-2000}{13-8} = \frac{10000}{5} = 2000$, significa que, por cada hora, la población creció en promedio unos 2000 microorganismos.

Al observar el velocímetro de un auto que se desplaza en una ciudad, se nota que la aguja no está fija por mucho tiempo, hay cambios, es por ello por lo que sabemos que la velocidad va variando y que se define en cada momento, cada segundo.

La **velocidad media** o promedio se define como el cociente (la razón) entre la diferencia de distancia en el intervalo de tiempo y el intervalo de tiempo.

$$Velocidad\ media = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Observa el siguiente ejemplo en Física

2. A las 7 am, Mayito y Alicia, en su auto se encuentran a 20 km de la ciudad de Mérida; a las 9: 30 am, se encuentran a 220 km de ella. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de su distancia a Mérida con respecto al tiempo, o sea, cuál es la velocidad promedio del recorrido?

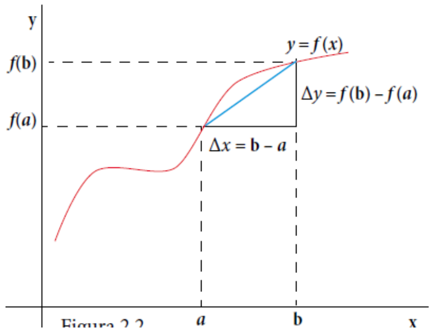
Solución: Considerando "t" el tiempo en horas y "s(t)" la distancia de la ciudad en kilómetros con respecto al tiempo, entonces

El incremento del tiempo, o variación del tiempo se halla $\Delta t = 9.5 - 7$ = 2.5 hr

El incremento de distancia o variación de distancia se halla $\Delta s = 220 - 20$= 200 km

Por lo tanto, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{220-20}{9.5-7} = \frac{200}{2.5} = 80km/h$, significa que, por cada hora, el auto avanzó 80 km.

Otro uso de la razón de cambio, es el hallarla **pendiente** de una recta, la razón promedio de una función $\boldsymbol{f}$ a la que se le ha trazado un segmento con extremos en dos puntos de su gráfica de abscisas en el intervalo $[a, b]$. O sea, es la hallar la pendiente de una recta secante a una curva.



$$Pendiente = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{la\ variación\ de\ las\ ordenadas}{la\ variación\ de\ las\ abscisas} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observa el siguiente ejemplo en Geometría.

3. Halla la pendiente de la recta secante a la función $y = \frac{x^2}{10}$ en los puntos cuando x= 4 y x = 5.
   Solución: Una estrategia es hallar las ordenadas para los que x es 4 y es 5, así mismo otros valores para el trazo de la función.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9	6.4	8.1	10

La pendiente de la recta secante será determinada por

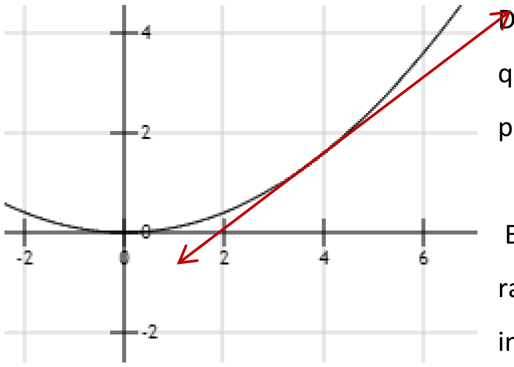
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{2.5-1.6}{5-4} = \frac{0.9}{1} = 0.9$ donde $\Delta x = 1$

Con esta información la representación gráfica queda de la siguiente manera:

Siendo esta la razón de cambio.

B

A



De manera notamos que existen problemas de variación que requieren de una razón para resolverse, y que pueden ser muy variados.

Existen problemas que no pueden ser resueltos con una razón promedio de cambio, y precisan de la razón instantánea o puntual de cambio.

En el ejercicio anterior podemos observar que cuando el punto B se mueve sobre la curva hacia A, la recta AB gira de tal manera que deja de ser una secante y se convierte en una recta que pasa por el (4, 1.6) y que es **tangente** a la curva.

Δx	Pendiente de la secante
0.1	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.681-1.6}{0.1}=0.81$
0.01	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.6801-1.6}{0.01}=0.801$
0.001	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.68001-1.6}{0.001}=0.8001$
0.0001	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.680001-1.6}{0.0001}=0.80001$

Cuando Δx es muy pequeño, la pendiente de la recta secante se acerca a 0.8.

O sea, $pendiente\ de\ la\ tangente = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

El símbolo $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es un ejemplo de ***una razón instantánea de cambio,*** y representa el ***límite (o valor) de la razón promedio de cambio*** cuando el incremento Δx es infinitamente pequeño, $\Delta x \to 0$ (cuando la secante tiende a ser una tangente)

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

En equipos realizar la actividad grupal determina la razón de cambio.

Se lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0.02x^2$

a) Representar la gráfica de la trayectoria.

b) Hallar la distancia horizontal total que recorre la pelota.

c) ¿Para qué valor de x alcanza la pelota su altura máxima? (Usar la simetría de la trayectoria).

d) Hallar la ecuación que expresa la razón de cambio instantáneo de la altura de la pelota respecto del cambio horizontal. Resolver la ecuación en x= 10.3

e) ¿Cuál es la razón de cambio instantáneo de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

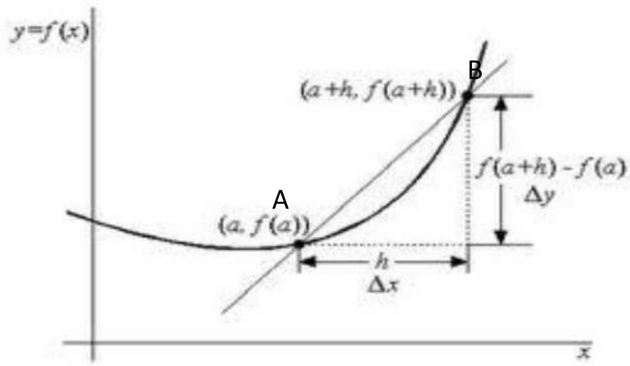
AE5.Reconoce la derivada como razón de cambio. Derivación de funciones algebraicas
Contenido específico. La derivada como razón de cambio.

SESIÓN 2. Realiza la lectura y utiliza una técnica para la presentación de las ideas principales.

La derivada

En la siguiente imagen se puede observar que a medida que B se aproxima a A, el Δx tiende a cero, y la pendiente de AB llegará a ser la misma que la tangente.

En consecuencia tenemos que $m = \underset{\Delta x \to 0}{\tan\theta} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



O sea, la secante se convierte en tangente ya que el incremento tiende a 0.

Si en la función $y = f(x)$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un límite cuando $\Delta x \to 0$ a este límite se le llama ***derivada*** *de y con respecto a x.*

Es decir, la ***derivada de una función*** con respecto a una variable es el límite, del incremento de la función entre el incremento de la variable, cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$\boldsymbol{derivada = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$, cuando el límite de la razón existe, se dice que la función tiene derivada.

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva, es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

La notación o simbología es variada, se lee $\frac{dy}{dx}$, y', $\frac{d}{dx}[f(x)]$, $\frac{df(x)}{dx}$, $D_x f$, $D_x y$, $f'(x)$. "la derivada de *y* con respecto a *x*".

Regla de los cuatro pasos para el cálculo de la derivada de la función *f* en un punto a

I. Da un incremento a x y evaluar para *f(x)* y *f(x+h)*

II. Expresa la diferencia *f(x+h) - f(x)*

III. Calcula el cociente de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y simplificar si es posible

IV. Halla $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Concluye el límite obtenido en f´(a)

Utilizando la definición $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, te presento algunos ejemplos para hallar la derivada.

Regla de los cuatro pasos para el cálculo de la derivada de la función f en un punto a	Usa la definición para hallar de derivada de $f(x) = 5x - 3$.
I. Da un incremento a x y evaluar para *f(x)* y *f(x+h)*	$f(x) = 5x - 3,\quad f(x+h) = 5(x+h) - 3$
II. Expresa la diferencia *f(x+h) - f(x)*	$f(x+h) = 5(x+h) - 3 - [5x - 3]$
III. Calcula el cociente de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y simplificar si es posible	$\frac{5x + 5h - 3 - 5x + 3}{h} = \frac{5h}{h} = 5$
IV. Halla $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0} 5 = 5$

Recuerda que la velocidad instantánea es una medida de variación de las distancias con respecto al tiempo.

Regla de los cuatro pasos para el cálculo de la derivada de la función f en un punto a	Una partícula describe su distancia a través de la función $s(t) = t^2 + 1$, halla la velocidad instantánea en el segundo 3.
I. Da un incremento a x y evaluar para *f(x)* y *f(x+h)*	$s(t) = t^2 + 1 \quad s(t+h) = (t+h)^2 + 1$
II. Expresa la diferencia *f(x+h) - f(x)*	$(t+h)^2 + 1 - [t^2 + 1]$ $t^2 + 2th + h^2 + 1 - t^2 - 1$
III. Calcula el cociente de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y simplificar si es posible	$\frac{t^2 + 2th + h^2 + 1 - t^2 - 1}{h} = \frac{2th - h^2}{h} = \frac{h(2t-h)}{h}$
IV. Halla $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2t-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2t-h) = 2t$
Concluye el límite obtenido en f´(a)	$s'(t) = 2t$, entonces $s'(t) = 2(3) = 6$

Luego, la velocidad cuando t= 3 segundos es de 6 metros por segundo.

Regla de los cuatro pasos para el cálculo de la derivada de la función ***f*** en un punto a	Una flecha se lanza verticalmente hacia arriba, con un desplazamiento determinado por $s(t) = -4.9t^2 + 60t$. Calcula la velocidad instantánea, a los 5 y 7 segundos.
I. Da un incremento a x y evaluar para *f(x)* y *f(x+h)*	$s(t) = -4.9t^2 + 60t$ $s(t+h) = -4.9(t+h)^2 + 60(t+h)$
II. Expresa la diferencia *f(x+h) - f(x)*	$-4.9(t+h)^2 + 60t + 60h - [-4.9t^2 + 60t]$ $-4.9t^2 - 9.8th - 4.9h^2 + 60t + 60h + 4.9t^2 - 60t$
III. IV. Calcula el cociente de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ y simplificar si es posible	$\frac{-9.8th - 4.9h^2 + 60h}{h}$
V. Halla $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{h(-9.8t - 4.9h + 60)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-9.8t - 4.9h + 60) = -9.8t + 60$
Concluye el límite obtenido en f´(a)	$s'(t) = -9.8t + 60$ entonces $s'(5) = -9.8(5) + 60 = 11\ m/s$ $s'(7) = -9.8(7) + 60 = -8.6\ m/s$

AE5.Reconoce la derivada como razón de cambio. Derivación de funciones algebraicas
Contenido específico. Construye y analiza sucesiones y reconoce patrones de crecimiento y de decrecimiento

SESIÓN 3. Observa en los ejemplos el uso de la definición para la resolución de problemas.

. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3 - x^2$ en el punto $P(-1, 2)$.

▼ La función es $f(x) = 3 - x^2$.

$$P(-1, 2) = P(x_0, f(x_0)) \Rightarrow x_0 = -1 \;\&\; f(x_0) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente t a la curva en P es:

$$\begin{aligned}
m_t &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3 - (h - 1)^2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - (h^2 - 2h + 1) - 2}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3 - h^2 + 2h - 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h - h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2 - h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2 - h) = 2; \\
m_t &= 2.
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente t en P es:

$$\begin{aligned}
&y - f(x_0) = m_t(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow \\
&\Rightarrow y = 2x + 2 + 2 \Rightarrow y = 2x + 4 \text{ o bien } 2x - y + 4 = 0.
\end{aligned}$$

La pendiente de la recta normal n es $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = -\dfrac{1}{2}$.

La ecuación de la recta normal n en P es:

$$\begin{aligned}
&y - f(x_0) = m_n(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow \\
&\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ o bien } x + 2y - 3 = 0.
\end{aligned}$$

El uso de la derivada de la función permite conocer el comportamiento de esta, por ejemplo:

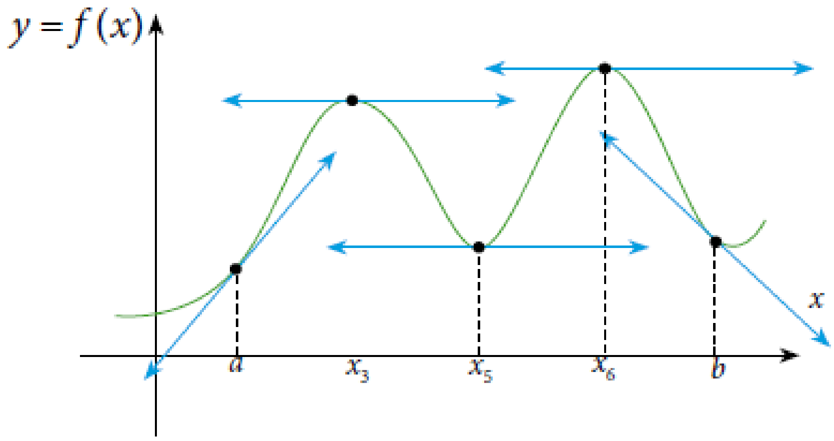
Función creciente. Se define una función creciente en un intervalo como aquella que cuando al aumentar la variable independiente ***x*** en ese intervalo, aumenta la variable dependiente ***y***.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

Función decreciente. Se define una función decreciente en un intervalo como aquella que cuando al aumentar la variable independiente ***x*** en ese intervalo, disminuye la variable dependiente ***y***. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$

Es decir, si la función es creciente en un intervalo o punto, entonces la pendiente de su recta tangente es positiva. Y si la función es decreciente en un intervalo o punto, entonces la pendiente de su recta tangente es negativa.

Para saber el crecimiento y decrecimiento de la función se debe observar de izquierda a derecha la variable independiente, y así notarás el crecimiento o decrecimiento de una función por intervalos del dominio, delimitando en cuáles es creciente y en cuáles decreciente. Esos cambios que vemos, en puntos del eje de abscisas que pasan de crecer a decrecer o viceversa se llaman los ***máximos relativos y mínimos relativos,*** o extremos relativos, de la función.

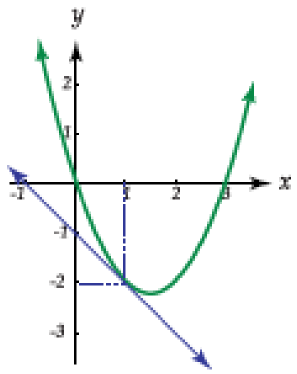


SESIÓN 4. Observa en los ejemplos el uso de la definición para la resolución de problemas

Ejemplo. Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $f)x = x^2 - 3x$, en el punto (1, -2). Observa si es creciente o decreciente el comportamiento de la función en dicho punto.

$$m_T = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x - (1 - 3)}{x - 1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} == \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x - 2) = -1$$

Por lo tanto, $m_T(1) = -1$. Tenemos la pendiente de la recta tangente y un punto que pasa por la recta, así que usando y= mx+b, sustituimos -2 = -(1) + b,



donde al resolver b = -1.

De esta manera la ecuación de la recta tangente es y= -x-1 .

Como $m_T(1) = -1$ y aplicando que si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ podemos asegurar que el comportamiento de la función es **decreciente** en dicho punto. C

Ejemplo. Presenta la ecuación de la recta normal a la curva $f(x) = \frac{4}{x}\ , donde\ x > 0$, en el punto (2, 2) y el comportamiento creciente o decreciente de la función en ese punto.

Como la recta Normal es perpendicular a la recta Tangente entonces sus pendientes cumplen

$$m_{N = -\frac{1}{m_T}}$$

Hallemos la pendiente de la recta tangente por la regla de los cuatro pasos.

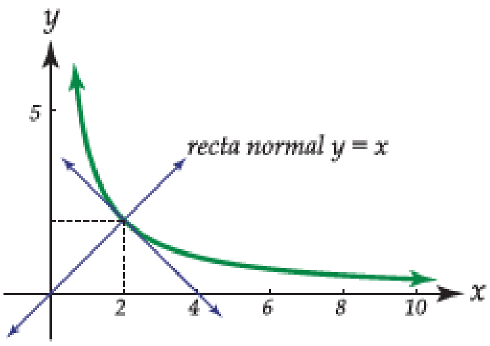
$$m_T = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{8 - 4x}{2x}}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{8 - 4x}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-4(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{x} = -1$$

Como $m_T(2) = -1$ entonces $m_N(2) = 1$

Tenemos la pendiente de la recta Normal y un punto que pasa por la recta, así que usando y= mx+b, sustituimos 2 = (1)(2) + b, donde al resolver b = 0.

De esta manera la ecuación de la recta normal es y= x.

Como $m_T(2) = -1$ y aplicando que si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ podemos asegurar que el comportamiento de la función es de**creciente** en dicho punto. Comprobemos gráficamente.



AE7. Utiliza los diferentes procesos para la derivación.

- Contenido específico. Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.

SESIÓN 1. Observa en los ejemplos el uso de la definición para la resolución de problemas

CÁLCULO DE DERIVADAS MEDIANTE REGLAS, FÓRMULAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Es posible que la derivada de una función sea otra función derivable, en ese caso a la derivada de la derivada se le denomina segunda derivada y se denota f''; también es posible que sea derivable la segunda derivada, o sea, se halle la tercera derivada y se denota f'''.

Es importante poder reconocer si una función es derivable en un punto. Te presento una manera no formal observación:

1. Exista límite de la función en ese punto
2. Sea continua en dicho punto
3. La función presente un comportamiento gradual, “suave”

Al tener la ecuación de una función es posible obtener su derivada utilizando la definición, pero para algunas funciones este procedimiento resulta sumamente largo y cansado. Surge entonces la posibilidad de simplificar este proceso, a través de los teoremas sobre derivadas.

Consulta los siguientes videos y completa la tabla que continua.

Función constante

https://www.youtube.com/watch?v=T42-57sojsA&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp__&index=6

Función potencia

https://www.youtube.com/watch?v=-PjdQi5Foio

Función raíz

https://www.youtube.com/watch?v=xr0_7dPW-Iw

https://www.youtube.com/watch?v=iyndofvTTiE

Función por una constante

https://www.youtube.com/watch?v=uKtq7gW3vr8&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp__&index=8

Función de 1/x

https://www.youtube.com/watch?v=KluPb75C60M&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp__&index=9

Función suma o diferencia

https://www.youtube.com/watch?v=RBN1HeRmZlc&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp__&index=12

Función de un producto

https://www.youtube.com/watch?v=nTY64wRlczA&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp&index=13
https://www.youtube.com/watch?v=oGdsyhlitkM&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp&index=15
Función cociente
https://www.youtube.com/watch?v=_Hrx6MM9Qo4&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp_&index=18

Descripción	Función	Derivada	Ejemplo
La derivada de una función constante es cero.	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	Si $f(x) = 3$ entonces $f'(x) = 0$
La derivada de una función identidad es uno.	$y = x$	$y' = 1$	Si $y = x$ entonces $y' = 1$
La derivada de una función lineal es la pendiente.	$y = mx$+b		Si $y = 3x + 2$ entonces $y' = 3$
La derivada de una función potencia es el producto de la potencia y la base elevada a la potencia menos uno.		$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = 8x^{3/4}$ entonces $f'(x) = 6x^{-1/4}$ o $f'(x) = \frac{6}{\sqrt[4]{x}}$
	$h = f \pm g$	$h' = f' \pm g'$	Si y= $(x^3 \pm x^7)$ entonces $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \pm 7x^6$
La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera	$h = f \cdot g$	$h' = f \cdot g' + g \cdot f'$	

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador y la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador			Si $h = \frac{2x+1}{3x^2+2x}$ entonces $h' = \dfrac{(3x^2+2x)\cdot(2) \quad -(2x+1)\cdot(6x+2)}{(3x^2+2x)^2}$ $= \dfrac{(6x^2+4x)-(12x^2+6x+4x+2)}{9x^4+12x^3+\ 4x^2}$ $h' = \dfrac{-6x^2-6x-2}{9x^4+12x^3+\ 4x^2}$
La derivada de una función compuesta (Regla de la cadena)	$h = (f \circ g)$		Si $y = \ (5x+3)^4$ entonces $y' = \ 4(5x+3)^3(5)$ $y' = 20(5x+3)^3$

SESIÓN 2, 3 y 4. Observa en los ejemplos del libro de CONAMAT. Y realiza la ADA 2 parte 1. Posteriormente retroalimenta con el grupo.

AE7. Utiliza los diferentes procesos para la derivación.
Contenidos específicos: Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.

SESIÓN 1. Observa en los ejemplos el uso de la definición para la resolución de problemas

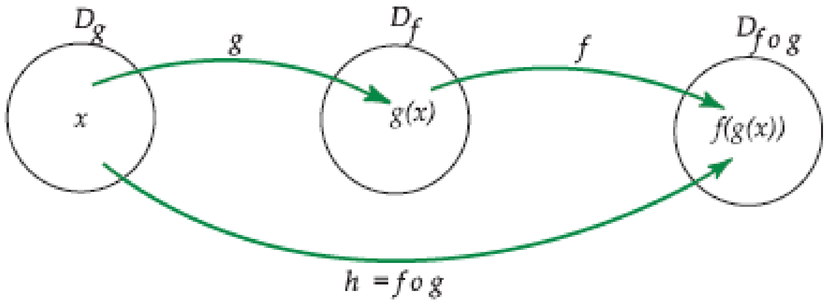
Derivada de una función compuesta (Regla de la cadena)

La gran mayoría de las funciones que se estudian en cálculo están construidas por una composición de funciones, de aquí la importancia de conocer un método sencillo para diferenciar dichas funciones; el método utilizado para hallar la derivada de una función compuesta se conoce como "**Regla de la cadena**".
La derivada de una función con respecto a ***x***, es igual a la derivada de la función con respecto a ***u***, multiplicada por la derivada de ***u*** con respecto a ***x***.
La **regla de la cadena** no es más que una fórmula para la derivada de la composición de dos funciones

Ejemplos:

$\frac{d}{dx}[(3x^4+5x^2+4)^{-2}]$ $=-2(3x^4+5x^2+4)^{-3}\cdot\frac{d}{dx}(3x^4+5x^2+4)$ $=-2(3x^4+5x^2+4)^{-3}\cdot(12x^3+10x)$	$y=(2x-7)^3$ $u=2x-7$ $u'=2$ $y'=3(2x-7)^{3-1}(2)$ $y'=6(2x-7)^2$
$\frac{d}{dx}\sqrt{5x^2+4}$ $=\frac{d}{dx}(5x^2+4)^{\frac{1}{2}}$ $=\frac{1}{2}\cdot(5x^2+4)^{\frac{-1}{2}}\cdot(10x+0)$ $=\frac{5x}{\sqrt{5x^2+4}}$	$f(x)=\frac{2}{3}(6x-4)^6$ $u=6x-4$ $u'=6$ $f'(x)=\frac{2}{3}(6)(6x-4)^{6-1}(6)$ $f'(x)=\frac{72}{3}(6x-4)^5$

Podemos notar que esta relación en los dominios que componen la función.



SESIÓN 2. Observa en los ejemplos los ejemplos en CONAMAT y realiza los ejercicios de la ADA 2 PARTE 2.

Actividad de Aprendizaje 1 Bloque 2 Sem. V

Nombre del estudiante: ________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** ___________

Contenidos	Fórmulas o técnicas de derivación. Regla de la cadena
Competencias Disciplinares	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
Atributos de las competencias genéricas	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

Instrucciones:
Realiza en equipo una exposición usando material (Papel Bond o PPT) de 5 ejercicios asignados y entrega una carpeta con ejercicios resueltos realizado la tabla con la función, la regla y la derivada del Ejercicio 29 (1, 4, 8, 9, 16, 21, 49, 50, 56, 58). CONAMAT. Pág. 110- 113

1. $y = -10$
2. $y = 5$
3. $f(x) = a^2$
4. $s(t) = b^2$
5. $y = 6x$
6. $y = \frac{3}{4}x$
7. $f(x) = ax$
8. $s(t) = b^2 t$
9. $f(x) = 5x\sqrt{2}$
10. $y = ax\sqrt{b}$
11. $f(x) = x^5$
12. $f(x) = 4x^3$
13. $s(t) = \frac{1}{5}t^4$
14. $y = x^{\frac{9}{2}}$
15. $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$
16. $y = 6x^{\frac{3}{2}}$
17. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$
18. $f(x) = 4x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = \sqrt{x}$
20. $s(t) = \sqrt[4]{t}$
21. $f(x) = 5\sqrt[5]{x}$
22. $f(x) = \frac{x^5}{7}$

48. $f(x) = a\sqrt[5]{x} + b\sqrt[3]{x}$
49. $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[4]{x^5}}{3}$
50. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{-1}}$
51. $f(x) = \frac{7}{x^{-2}} + \frac{5}{x^{-3}}$
52. $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$
53. $f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{\sqrt[3]{x}}$
54. $y = \sqrt{x^{-1}}\left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$
55. $y = (3x - 4)^5$
56. $y = (2 - 4x)^3$
57. $y = (3x^5 - 2x^4)^4$
58. $y = \left(4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	**LISTA DE COTEJO Bloque 2**	**ADA 1 Valor: 20 puntos**
GRADO y GRUPO:	**FECHA:**	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
f. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. g. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente h. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA i. El nombre del archivo será CalDif_B2_ADA 2_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B2_ADA2_Equipo3 j. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		*La entrega fuera de fecha será penalizada con 2 puntos. Teniendo como fecha máxima el día inmediato posterior a la fecha establecida. *No entregar lista de cotejo causa una penalización de 1 punto
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	1		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	1		
Contenido			
Presenta procedimientos claros y ordenados, así como aplica la técnica correspondiente al resolver ejercicios de derivadas	15		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	1		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	1		
Total	**20**		

Nombre del Equipo:	Nombre del Representante:

Integrantes del equipo	Firma de conformidad con el resultado
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	Preformal 0-59	Receptivo 60-69	Resolutivo 70-79	Autónomo 80-89	Estratégico 90-100

SESIÓN 3. Retroalimenta en trabajo de coevaluación a tus pares.

SESIÓN 4. Observa la definición y resolución de ejercicios

Derivadas de orden superior

Puede ocurrir que la derivada de la función sea a su vez una función derivable, o sea, la derivada de la derivada. A ésta se le llama segunda derivada de la función y se denota por f''.

Podría ser que la segunda derivada también sea una función derivable, o sea la derivada de la segunda derivada. A ésta se le llama tercera derivada y se denota f'''.

De la misma manera se puede calcular la cuarta derivada y así sucesivamente. Estas son derivadas sucesivas o de orden superior.

En general, una derivada superior es la n-ésima derivada de *y=f(x)* cuando *n* es mayor que uno.

Ejemplo:

Ejemplo	Ejemplo
Si $f(x) = 6x^4 + 5x^3 - 3x^2$ Entonces: $f'(x) = 24x^3 + 15x^2 - 6x$ $f''(x) = 72x^2 + 30x - 6$ $f'''(x) = 144x + 30$	Si $g(x) = \frac{-3x^2}{x^3-1}$ Entonces: $f'(x) = \frac{(x^3-1)(-6x)-(-3x^2)(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{3x^4+6x}{(x^3-1)^2}$ $f''(x) = \frac{(x^3-1)^2(12x^3+6)-2(x^3-1)(3x^2)(3x^4+6x)}{(x^3-1)^4}$ Desarrollando y reduciendo tendremos $f''(x) = —$

Recordamos que si $s(t)$ nos indica la distancia de una partícula al origen en un tiempo, entonces $\frac{d}{dt}s(t)$es la velocidad e el tiempo.

Al calcular la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, al calcular $\frac{d}{dt}v(t)$ se obtiene la aceleración instantánea en el tiempo. Si denotamos esta aceleración por $a(t)$ se tiene que $a(t) = s''(t)$, es decir segunda derivada de la distancia respecto al tiempo es la aceleración.

Ejemplo: Calcula la velocidad y la aceleración instantánea a los 3 segundos de un cuerpo que se mueve en línea recta según $s(t) = t^3 - 4t^2 + 10$

Solución: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 10$ por lo tanto velocidad instantánea es igual a la primera derivada del desplazamiento y la aceleración es igual a la segunda derivada del desplazamiento, o sea

$\dot{v}(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t$ de donde a los 3 segundos, $\dot{v}(3) = 3(3)^2 - 8(3) = 27 - 24 = 3\ m/s$

$a(t) = s''(t) = 6t - 8$ de donde a los 3 segundos $a(t) = 6(3) - 8 = 18 - 8 = 10\ m/s^2$

Ejemplo:

Determinar la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica de la curva con ecuación $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, en los que la razón de cambio de la pendiente es cero.

Solución:

Se tiene que $y' = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ da la pendiente de la recta tangente a la curva.

Además $y'' = 12x^2 + 6x - 6$ determina la razón de cambio de la pendiente.

Debemos averiguar los valores de x en los que esta razón de cambio es cero;

Entonces $y'' = 0 \Longleftrightarrow 6(2x-1)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ó $x = 1$

Luego, cuando $x = \frac{1}{2}$ la pendiente es $y' = 12\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{6}{2} - 6 = 0$ y cuando $x = -1$ la pendiente y' también es cero.

AE7. Utiliza los diferentes procesos para la derivación.
AE6. Construye y analiza sucesiones y reconoce patrones de crecimiento y de decrecimiento.
Contenidos específicos: Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.
Derivadas de funciones trigonométricas

SESIÓN 1. Observa las definiciones y ejemplos para que te apoye para la resolución del ADA 3. Derivación de funciones trascendentes

Las funciones trascendentes son aquellas conformadas por las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Iniciemos con las **funciones trigonométricas** que son derivables.

1. $(\text{sen } x)' = \cos x$	4. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
2. $(\cos x)' = -\text{sen } x$	5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
3. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	6. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = -\csc^2 x$

Ejemplo: Deriva la función $y = 2x^3 sen\ x$

Solución: Observamos que es el producto de dos expresiones, y se hallará la derivada usando la regla para la derivación de una función producto, recuerda: $h' = f \cdot g' + g \cdot f'$ o sea si $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = sen\ x$, entonces $f'(x) = 6x^2$ y $g'(x) = \cos x$ por lo tanto, apliquemos la regla.

$y'= x^3 \cos x + (sen\ x)(\ 6x^2)$

$y'= x^3 \cos x + 6x^2 sen\ x$

Ejemplo: Deriva la función $y = \tan\,(5x^2 + x)$

Solución: Observamos que el ángulo es un binomio, por lo tanto, usando la regla de la cadena podemos llegar a aplicar la derivada de la función por la derivada del ángulo.

$y' = (10x + 1)\ sec^2(5x^2 + x)$

Las reglas para las **funciones trigonométricas inversas** son las siguientes

$$\frac{d}{dx}arcsen(u)=\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}arccos(u)=-\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}arctan(u)=\frac{du/dx}{u^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}arc\,cot(u)=-\frac{du/dx}{u^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}arc\,sec(u)=\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}arc\,csc(u)=-\frac{du/dx}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Ve los siguientes ejemplos

$y = arcsen(4x)$ $u = 4x$ por lo tanto $u' = 4$ y $u^2 = 16x^2$ Entonces $y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$	$y = arctan(4x-5)$ $u = 4x-5$ por lo tanto $u' = 4$ y $u^2 = (4x-5)^2$ Entonces $y' = \frac{4}{1+(4x-5)^2}$

De la misma manera se utilizan las otras reglas para funciones inversas trigonométricas.

Consulta la siguiente dirección que te ayudará a repasar los ejercicios vistos en clase.

https://www.youtube.com/watch?v=5p8XXEvjIcM

SESIÓN 2 y 3. Resuelve los ejercicios del ADA2

Dirección de Educación Media Superior
Escuela Preparatoria Estatal No 06
Alianza de Camioneros

Asignatura: Cálculo Diferencial

Actividad de Aprendizaje 2 Bloque 2 Sem. V

Nombre del estudiante: ______________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** __________

Contenidos	Derivadas de orden superior Derivadas de funciones trigonométricas e inversas
Competencias Disciplinares	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
Atributos de las competencias genéricas	Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

Instrucciones:

a) Entrega un archivo en Word con fotos de los ejercicios resueltos realizado la tabla con la función trigonométrica, la regla y la derivada del Ejercicio 31 CONAMAT. Pág. 117 y Ejercicio 32 pág. 120

b) Realiza en equipo una exposición usando PPT de 3 ejercicios de derivación superior

Función	Regla	Derivada
$y = \cos(5x - \frac{\pi}{2})$		
$y = \frac{sen\ 3x}{x}$		
$y = \cot \sqrt[3]{x}$		
$y = arc \cos \frac{x}{4}$		
$y = \sec \frac{1}{\sqrt{x}}$		
$y = x^2 arc \tan x$		
$y = \sqrt{\sec\ 5x^2}$		
$y = arc \csc 3x^2$		
$y = x^2 cos x^2$		
$y = arc\ \mathrm{sen}(cos \frac{x}{3})$		

Resuelve los siguientes ejercicios de derivación superior en PPT

a) $y = 12x^5 - \frac{3}{4}x^4 - x^2$ Halla y'''

b) $y = \frac{1}{x}$ Halla $y^{(4)}$

c) $y = 5x^2 + \frac{3}{x}$ Sexta derivada

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 2	ADA 2 Valor: 20 puntos
GRADO y GRUPO:	FECHA:	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
a. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. b. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente c. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA d. El nombre del archivo será CalDif_B2_ADA 2_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B2_ADA2_Equipo3 e. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		*La entrega fuera de fecha será penalizada con 2 puntos. Teniendo como fecha máxima el día inmediato posterior a la fecha establecida. *No entregar lista de cotejo causa una penalización de 1 punto
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	1		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	1		
Contenido			
Presenta procedimientos claros y ordenados, así como aplica la técnica correspondiente al resolver ejercicios de derivadas trigonométricas y de orden superior	15		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	1		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	1		
Total	**20**		

Nombre del Equipo:	**Nombre del Representante:**

Integrantes del equipo	**Firma de conformidad con el resultado**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	**Preformal 0-59**	**Receptivo 60-69**	**Resolutivo 70-79**	**Autónomo 80-89**	**Estratégico 90-100**

SESIÓN 4. Retroalimenta los ejercicios del ADA2

AE7. Utiliza los diferentes procesos para la derivación.
AE6. Construye y analiza sucesiones y reconoce patrones de crecimiento y de decrecimiento.
Contenidos específicos: Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.
Derivadas de funciones trigonométricas

SESIÓN 1. Observa las definiciones y ejemplos para que te apoye para la resolución del ADA 3. Derivación de funciones trascendentes

DERIVACIÓN DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Logarítmicas	Exponenciales
$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$	$\frac{d}{dx}(a^u) = u'a^u \ln a$
	$\frac{d}{dx}(e^u) = u'e^u$

Ejemplos: Encuentra la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

1) $f(x)=\ln(5x-7)$ $u=5x-7$ $u'=5$ $f'(x)=\frac{5}{5x-7}$	2) $f(x)=\ln(4x^2-8x+3)$ $u=4x^2-8x+3$ $u'=8x-8$ $f'(x)=\frac{8x-8}{4x^2-8x+3}$
3) $f(x)=9^{3x}$ $u=3x$ $u'=3$ $f'(x)=3(9^{3x})\ln 9$	4) $f(x)=3^{x^2-3x}$ $u=^{x^2-3x}$ $u'=2x-3$ $f'(x)=(2x-3)(3^{x^2-3x})\ln 3$
5) $f(x)=e^{2x}$ $u=2x$ $u'=2$ $f'(x)=2e^{2x}$	6) $f(x)=e^{x^2+5x}$ $u=x^2+5x$ $u'=2x+5$ $f'(x)=(2x+5)e^{x^2+5x}$

Es importante recordar las propiedades de los logaritmos, las cuales te permitirán reducir o simplificar la función:

1. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$
5. $\log^n{}_a A = (\log_a A)^n$

SESIÓN 2 y 3. Observa los ejemplos de CONAMAT y resuelve los ejercicios de la ADA 3.

Actividad de Aprendizaje 3 Bloque 2 Sem. V

Nombre del estudiante: ___________________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** ______________

Contenidos	Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales	
Competencias Disciplinares	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.	
Atributos de las competencias genéricas		Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

Instrucciones:

a) Entrega una carpeta con ejercicios resueltos realizado la tabla con la función logarítmica y exponencial, la regla y la derivada del Ejercicio 33. CONAMAT. Pág. 125

Consulta:
https://www.youtube.com/watch?v=krZ92qtMwkY
https://www.youtube.com/watch?v=bEmCMdwXy5o

Función	Regla	Derivada
$y = \ln x^3$		
$y = \ln(3x^2 - 5x + 2)$		
$y = x \ln x^2$		
$y = \ln\left(\frac{3x-5}{2x+1}\right)$		
$y = \ln \cos 5x$		
$y = 2^{x^2+5x}$		
$y = 5^{x\, sen\, x}$		
$y = e^{2x} \csc 3x^2$		
$y = \ln\,(x^2 cosx^2)$		
$y = \frac{xe^x}{x+1}$		

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	LISTA DE COTEJO Bloque 2	ADA 3 Valor: 10 puntos
GRADO y GRUPO:	FECHA:	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
f. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. g. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente h. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA i. El nombre del archivo será CalDif_B2_ADA 3_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B2_ADA3_Equipo3 j. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		*La entrega fuera de fecha será penalizada con 2 puntos. Teniendo como fecha máxima el día inmediato posterior a la fecha establecida. *No entregar lista de cotejo causa una penalización de 1 punto
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	0.5		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	0.5		
Contenido			
Presenta procedimientos claros y ordenados, así como aplica la técnica correspondiente al resolver ejercicios de derivadas	7		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	0.5		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	0.5		
Total	**10**		

Nombre del Equipo:	Nombre del Representante:

Integrantes del equipo	Firma de conformidad con el resultado
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	Preformal 0-59	Receptivo 60-69	Resolutivo 70-79	Autónomo 80-89	Estratégico 90-100

SESIÓN 4. RETROALIMENTACIÓN DE LA ADA.

METACOGNICIÓN

Excelente = Logré el aprendizaje de manera independiente.

Bueno = Necesité ayuda para construir mi aprendizaje.

Regular = Fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente

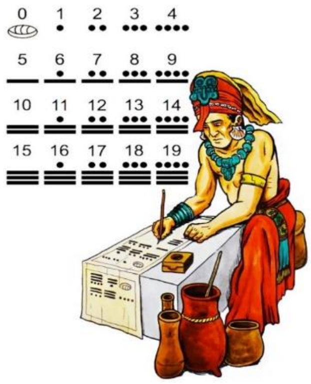
	Criterios	Niveles de desempeño		
		Excelente	Bueno	Regular
Procedimental	Utilizas el concepto de razón de cambio para la aplicación de la derivada			
	Utilizas la regla de los cuatro pasos para derivar			
	Identificas tipos y características de las funciones para aplicar la técnica de derivación algebraica			
	Hallas la derivada de funciones trigonométricas			
	Hallas la derivada de funciones exponenciales			
	Hallas la derivada de funciones logarítmicas			
	Hallas la derivada de orden superior de funciones			
Actitudinal	Organizas tu horario de trabajo			
	Organizas la información e investigas los temas			
	Te interesas en ver los videos y las lecturas por el bien individual y colectivo			
	Valoras el trabajo en equipo aportando y refutando ideas en la resolución de problemas.			
	Cumples con las indicaciones dadas para el buen desarrollo de las actividades.			
	Buscas y sugieres soluciones a los problemas planteados.			

Comprueba tus conocimientos con el test en Khan Academy

BLOQUE 3.

USOS DE LA DERIVADA

- Máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada
- Puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada



Criterios de evaluación

Práctica Evaluativa 50%

Actividades de aprendizaje 50%

AE8. Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.
AE9. Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función.
Contenidos específicos: ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día? Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada ¿Dónde se crece más rápido?

SESIÓN 1. Elabora un diagrama de flujo para explicar el desarrollo de optimización

Introducción

La derivada es útil para resolver casos en los que se requiere saber cuál es la mejor opción entre muchas, en cuanto a optimización, mayor área, menor costo, etc. Por ejemplo, un ejidatario necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un pediatra desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un empresario le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

Te sugiero u método que puede aplicarse a problemas prácticos de optimización. No lo sigas ciegamente; si el sentido común te sugiere una forma alterna, no dudes es seguir tu lógica

Paso 1: Has un dibujo del problema y asigna variables para las cantidades importantes.

Paso 2: Escribe una fórmula o un modelo, esta es la que se maximizará o minimizará

Paso 3: Usa las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables,

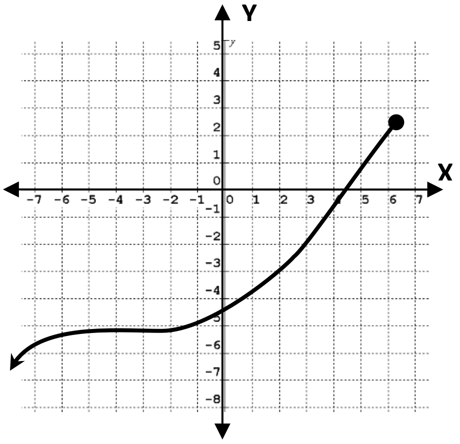
Paso 4: Encuentra los puntos críticos (fronterizos, estacionarios, singulares).

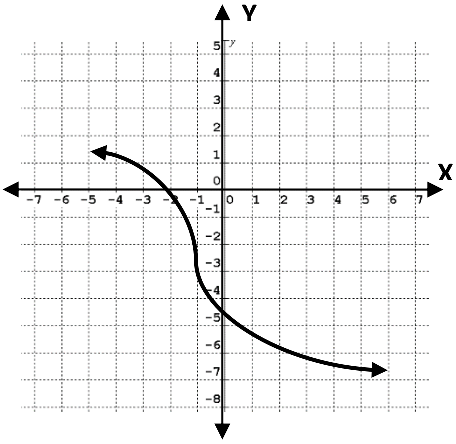
Paso 5: Sustituye los valores críticos en la función y analiza los resultados.

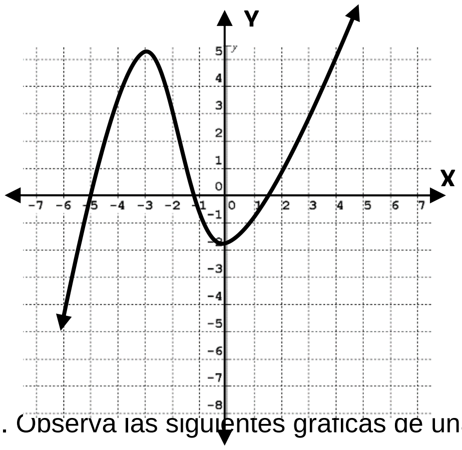
Usa siempre su intuición para obtener alguna idea de cuál debe ser la solución del problema.

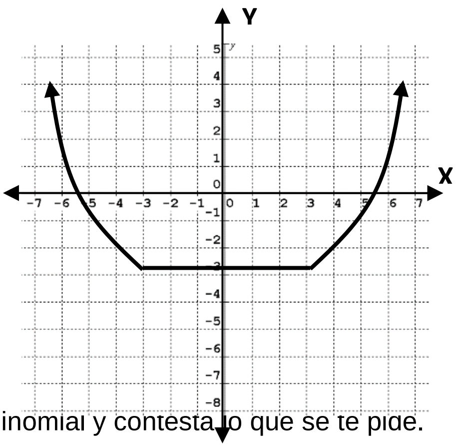
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1.. Colorea de azul donde la función es creciente y de rojo donde es decreciente y de verde el punto de inflexión, y los puntos críticos de negro.

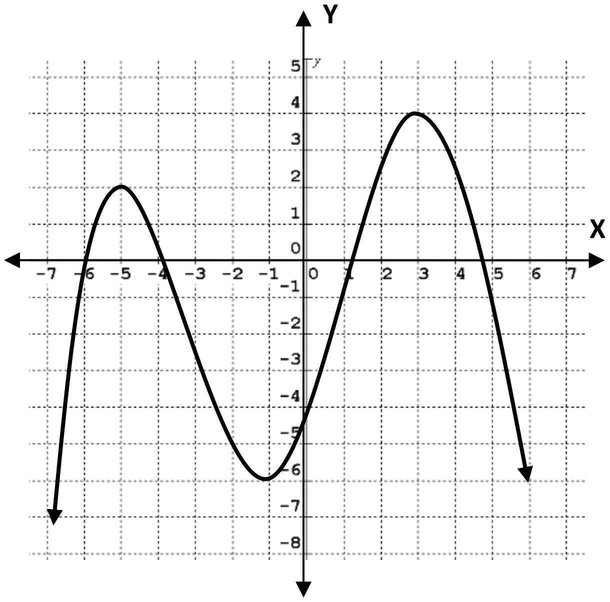








2. Observa las siguientes gráficas de una función polinomial y contesta lo que se te pide.



Escribe las coordenadas de los puntos críticos: ___________________________

____

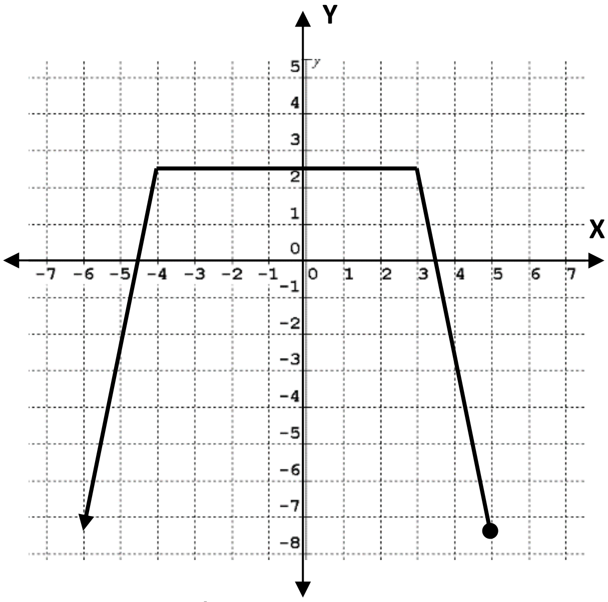
Define los intervalos en los que se divide la función a partir de los puntos críticos anteriores: _________________________

____

____

Con la información anterior completa la siguiente tabla.

Intervalo	Signo de las pendientes de las rectas tangentes.	¿Crecimiento o decrecimiento?
$(-1,3)$	Las pendientes de las rectas tangentes en este intervalo son positivas.	En este intervalo la función está creciendo.



Escribe las coordenadas de los puntos críticos: ___________________________
____

Define los intervalos en los que se divide la función a partir de los puntos críticos anteriores: ________________________
____
____

Con la información anterior completa la siguiente tabla.

Intervalo	Signo de las pendientes de las rectas tangentes.	¿Crecimiento o decrecimiento?

SESIÓN 2. Realiza una lectura utilizando las preguntas periodísticas

MÁXIMO Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Un máximo y un mínimo en un intervalo no son necesariamente el mayor ni el menor valor de la función, por eso se les llama máximo y mínimos relativos.

Para obtener los máximos y mínimos relativos, hay dos procedimientos:

• El criterio de la primera derivada.

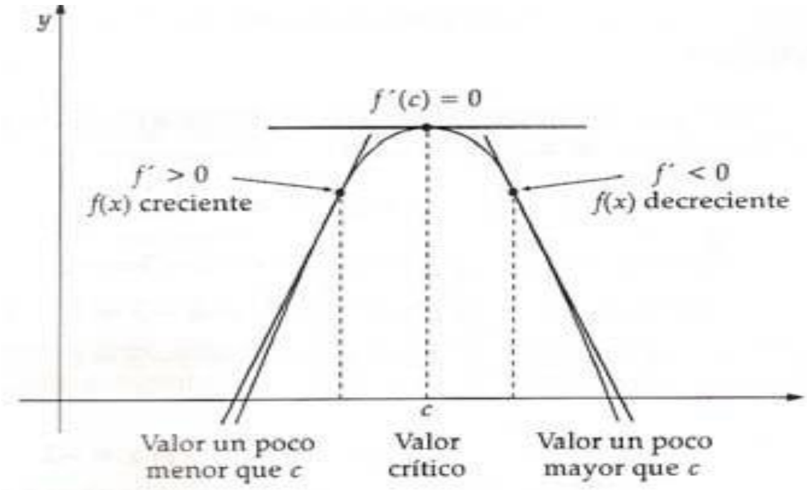
• El criterio de la segunda derivada.

Criterio de la primera derivada para encontrar puntos máximos y mínimos

a) Si f´(x)> 0, para todo valor en un intervalo y f´(x) < 0 para un intervalo consecutivo (es decir, la derivada cambia de valores positivos a negativos), entonces existe un valor máximo local o relativo en la función.

b) Si f´(x)<0, para todo valor en un intervalo y f´(x) > 0 para un intervalo consecutivo (es decir, la derivada cambia de valores negativos a positivos), entonces existe un valor mínimo local o relativo en la función.

c) Si para todo intervalo f´(x) tiene el mismo signo, entonces no existe valor máximo ni mínimo.

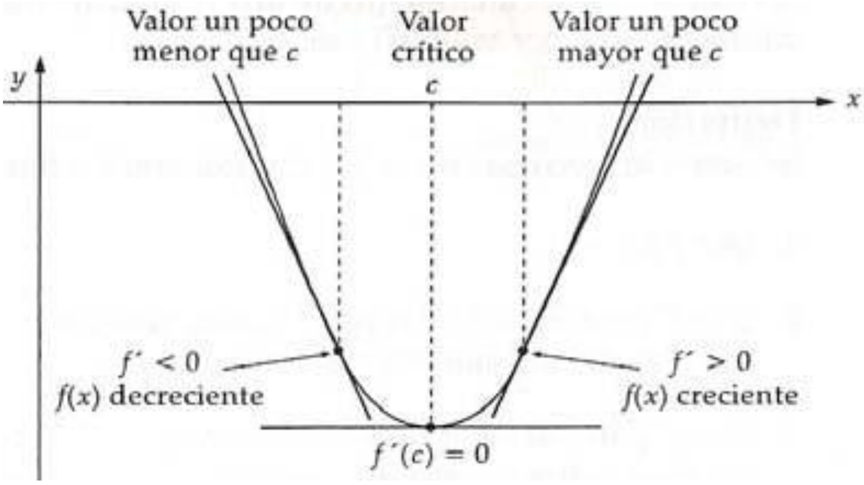


• *Máximo relativo:*

La función pasa de creciente a decreciente; es decir, el valor de la derivada pasa de positivo a negativo.

Mínimo relativo:

La función pasa de decreciente a creciente; es decir, el valor de la derivada pasa de negativo a positivo



Pasos para hallar los máximos y mínimos relativos de una función

1. Derivar f(x)

2. Encontrar los valores críticos.

3. Determinar los intervalos de prueba con los valores críticos obtenidos.

4. Determinar el signo de f(x) en cada uno de los intervalos utilizando un número de prueba en cada uno.

5. Análisis de resultados. Si el signo de f(x) en los intervalos de prueba consecutivos es diferente, entonces en el punto crítico hay un extremo relativo.

   a) Si en el que está a la izquierda del valor crítico dicho signo es positivo y a la derecha es negativo, entonces el punto crítico es un máximo relativo de f(x).

   b) Si por el contrario, f(x) tiene signo negativo a la izquierda del valor crítico y signo positivo a la derecha, entonces el punto crítico es un mínimo relativo de f(x).

   c) Sí f (x) no cambia de signo alrededor del valor crítico entonces no es ni máximo ni mínimo

Paso 6. Determinar el (los) puntos críticos.

Ejemplo: Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Paso 1 Derivar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$....... *donde* $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Paso 2 Encontrar los valores críticos.

Resolviendo la ecuación que resulta de igualar la derivada a cero: $3x^2 - 6x = 0$

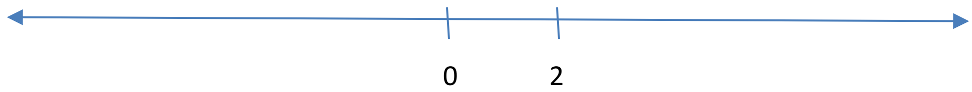
Esta resulta ser una ecuación de segundo grado, podemos resolver por factorización por lo que se obtiene: $3x(x - 2) = 0$

Igualando cada uno de los factores a cero tenemos que:

$3x = 0$ *donde, despejando* $x = 0$ *y*

$(x - 2) = 0$ *donde despejando* $x = 2$

Paso 3. Determinar los intervalos de prueba con los valores críticos obtenidos.



Se ubican en la recta numérica los valores, de tal manera que se puede observar que los intervalos serán de (-∞, 0), de (0, 2) y de (2, ∞)

Paso 4. Determinar el signo de f(x) en cada uno de los intervalos utilizando un número de prueba en cada uno de éstos.

Se elige un valor menor y uno mayor próximo al valor crítico para analizar

Intervalo	Número elegido	Evaluación en la derivada	Signo
(-∞, 0)	-5	$y = 3(-5)^2 - 6(-5) = 105$	f(x)>0
(0, 2)	1	$y = 3(1)^2 - 6(1) = -3$	f(x)<0
(2, ∞)	4	$y = 3(4)^2 - 6(4) = 24$	f(x)> 0

Paso 5. Análisis

El cambio es de positivo a negativo y después de negativo a positivo.

Del cambio de positivo a negativo podemos concluir que la función tiene un máximo según el inciso a del criterio de la primera derivada en el valor crítico x=0.

Del cambio de negativo a positivo podemos concluir que la función tiene un mínimo según el inciso b del criterio de la primera derivada en el valor crítico x=2.

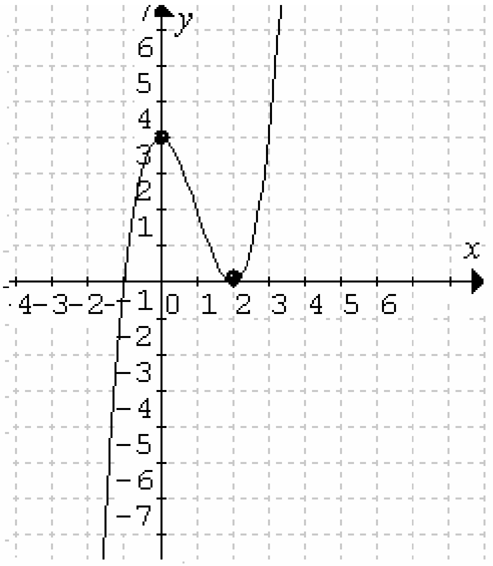
Paso 6. Se evalúa en la función para hallar la ordenada de los puntos críticos.

En $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Para $x = 0 \quad y = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 \qquad y = 4$

Para $x = 2 \quad y = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 \qquad y = 0$

Por lo que el punto (0,4) es un máximo relativo y el punto (2,0) es un mínimo relativo



Ver https://www.youtube.com/watch?v=Q73XxigqTP8

https://www.youtube.com/watch?v=sE5jdoJd97g

https://www.youtube.com/watch?v=EsCisbiu9fk

SESIÓN 3. Resuelve

Actividad de Aprendizaje 1 Bloque 3 Sem: V

Nombre: _________________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** _____________

Contenidos	Máximos, mínimos absolutos. creciente, decreciente
Competencias Disciplinares	1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Atributos de las competencias genéricas	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.(Atributo: 4.1) 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6) 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3) 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1) 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3

Instrucciones :
Con base en la introducción de este bloque y en materiales de consulta, elabora un diagrama de flujo en la que representes cada uno de los pasos para hallar los valores críticos, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de x donde la función es creciente y donde es decreciente, el punto de inflexión, el intervalo de ***x*** donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
Realiza el ejercicio 41 de la pág. 159 .(únicamente números PARES) de CONAMAT

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	**LISTA DE COTEJO Bloque 3**	**ADA 1 Valor: 25 puntos**
GRADO y GRUPO:	**FECHA:**	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
j. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. k. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente l. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA m. El nombre del archivo será CalDif_B3_ADA 1_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B3_ADA1_Equipo3 n. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	0.5		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	0.5		
Contenido			
II Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver máximos y mínimos usando la primera derivada.	21		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	1		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	1		
Total	**25**		

SESIÓN 4. Retroalimentación.

Nombre del Equipo:	Nombre del Representante:

Integrantes del equipo	Firma de conformidad con el resultado
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	Preformal 0-59	Receptivo 60-69	Resolutivo 70-79	Autónomo 80-89	Estratégico 90-100

AE11. Localiza los máximos, mínimos y las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.
Contenidos específicos: Encuentra los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión?

SESIÓN 1. Realiza comentarios y lluvia de ideas para compartir las ideas principales.

CONCAVIDADES Y PUNTO DE INFLEXIÓN.

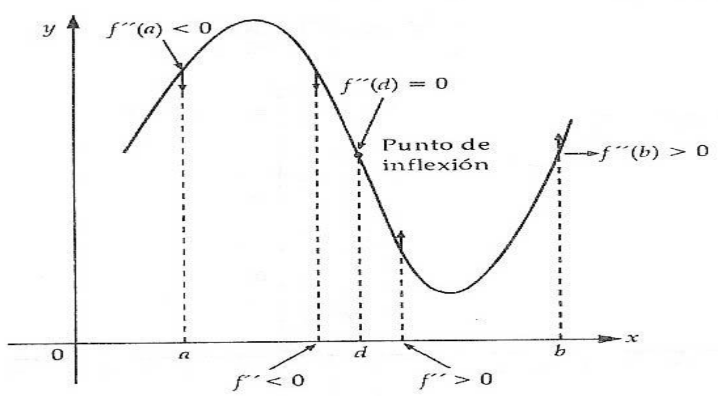
Son los puntos donde cambia el sentido de la concavidad de una función. Para ello se usa la segunda derivada.
Con los puntos de inflexión podemos determinar los intervalos de prueba para determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo en cada una de ellas.

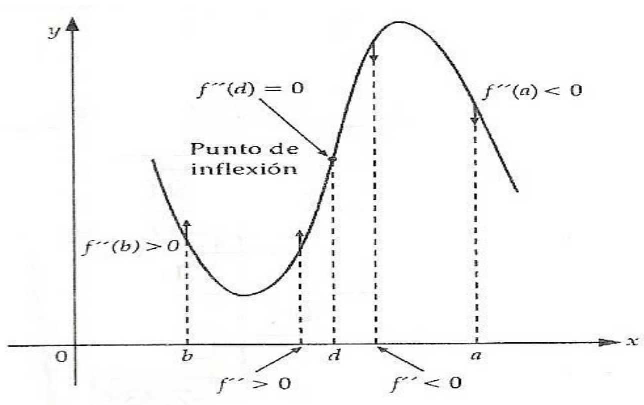
Pasos para determinar la concavidad de una función f(x)

1. Determinar la segunda derivada f”(x).
2. Igualar a cero f”(x) = 0.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Determinar los intervalos de prueba utilizando los valores de x, obtenidos en el paso anterior.
5. Hallar el signo de f”(x) en cada intervalo.

Si f”(x) es positiva en un intervalo, entonces f(x) es cóncava hacia arriba, o sea, si f’’(x)>0 entonces la función f(x) es cóncava hacia arriba ∪.

Si f”(x) es negativa en un intervalo, es cóncava hacia abajo, o sea, si f’’(x)< 0 entonces la función f(x) es cóncava hacia abajo ∩.





Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 1$ encuentra:

a) Los puntos de inflexión.

b) Los intervalos donde es cóncava hacia arriba ∪

c) Los intervalos donde es cóncava hacia abajo ∩

Paso 1 Determina la segunda derivada

$f'(x) = 3x^2 - 18x$

$f''(x) = 6x - 18$

Paso 2 Igualando la segunda derivada a cero tenemos que:

$6x - 18 = 0$

Paso 3 Resolver la ecuación anterior:

$6x - 18 = 0$ $\qquad$ $6x = 18$ $\qquad$ $x = 3$

El único valor de la abscisa del **punto de inflexión** es x = 3, por lo que la ordenada la hallamos sustituyendo en $y = x^3 - 9x^2 + 1$, $y = (3)^3 - 9(3)^2 + 1$….. donde y= -53

Siendo en único punto de inflexión (3, -53)

Determinando los intervalos y números de prueba.

En $f''(x) = 6x - 18$

Análisis

Intervalo	Número elegido	Evaluación en la segunda derivada $f''(x) = 6x - 18$	Signo
(-∞, 3)	0	$y = 6(0) - 18 = -18$	f(x)<0
(3, ∞)	4	$y = 6(4) - 18 = 6$	f(x)> 0

Por lo tanto:

(-∞,3) Cóncava hacia abajo y (3,∞) Cóncava hacia arriba

SESIÓN 2. Subraya los pasos con tinta roja

Ejemplo: Obtenga los puntos máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ así como los intervalos en los cuales es creciente y decreciente.

Derivando la función $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

Igualando con cero la primera derivada $3x^2 - 6x - 9 = 0$

Simplificando y resolviendo la ecuación, se tiene la abscisa de los puntos críticos

$x^2 - 2x - 3 = 0,$ $(x-3)(x+1) = 0$ con x-3=0 y x+1=0, obteniendo x=3 y x=-1

Calculando la segunda derivada de la función $f''(x) = 6x - 6$

Evaluando la segunda derivada en los valores críticos.

X	$f''(x) = 6x - 6$	
-1	6(-1)-6=-12	$f''(x) < 0$ $entonces\ se\ tiene\ un\ máximo\ en\ x = -1$
3	6(3)-6=12	$f''(x) > 0$ $entonces\ se\ tiene\ un\ mínimo\ en\ x = 3$

Evaluando los puntos críticos en la función original, se tiene el valor de sus ordenadas

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$	
-1	$(-1)^3 - 3(-1)^2$-9(-1)+3= 8	Entonces se tiene un máximo en (-1,8)
3	$-3(3)^2 - 9(3) + 3 = -24$	Entonces se tiene un mínimo en (3,-24)

A partir de estos datos, se determinan los intervalos donde la función es creciente o decreciente, es importante tener en cuenta que estos mismos intervalos también es posible obtenerlos mediante la primera derivada de la función.

La función es creciente en: $x \in (-\infty, -1)$ y en (3,∞) y la función es decreciente en: $x \in (-1,3)$

Traza la gráfica.

Ejemplo: Un proyectil es disparado siguiendo una trayectoria parabólica, dada por la ecuación $h = -t^2 + 8t - 13$, donde h es la altura en metros y t el tiempo en segundos. Halla el tiempo en que alcanza su altura máxima y el valor de ésta.

En este caso la función objetivo a maximizar es $h = -t^2 + 8t - 13$

Derivando la altura con respecto al tiempo, igualando a cero y resolviendo la ecuación

$h' = -2t + 8$

$-2t + 8 = 0$

$t = 4$ Por lo tanto el punto crítico se presenta cuando t = 4

La segunda derivada es $h'' = -2$

En el punto crítico $h''(4) = -2 < 0$ entonces en t= 4 la función presenta un máximo.

Sustituyendo t en h se obtiene $h = -(4)^2 + 8(4) - 13 = 3$, por lo tanto el proyectil tarda 4 segundos en alcanzar la altura máxima que es de 3 metros.

SESIÓN 3. Observa los ejemplos y presenta dos más para compartir.

PROBLEMAS PRÁCTICOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Se desea construir una caja sin tapa con una lámina rectangular de 40 cm. de largo y 30 cm., de ancho, cortando un cuadrado de lado x en las cuatro esquinas y doblando las cejas hacia arriba para formar la caja. Encuentra las dimensiones de la caja que dan el volumen máximo que puede construirse de esta forma.

Para la solución del problema, desarrolla:

a) El modelo geométrico asociado al problema.

b) La condición que debe cumplir la profundidad (altura) de la caja.

c) El modelo matemático asociado al problema.

d) El Registro tabular.

e) La Gráfica de la función volumen.

f) La Interpretación de la gráfica para el volumen máximo.

g) Utilizando el criterio de la primera derivada para resolver el problema.

h) Utilizando el criterio de la segunda derivada para resolver el problema.

a) El modelo geométrico del problema se presenta en la figura 1

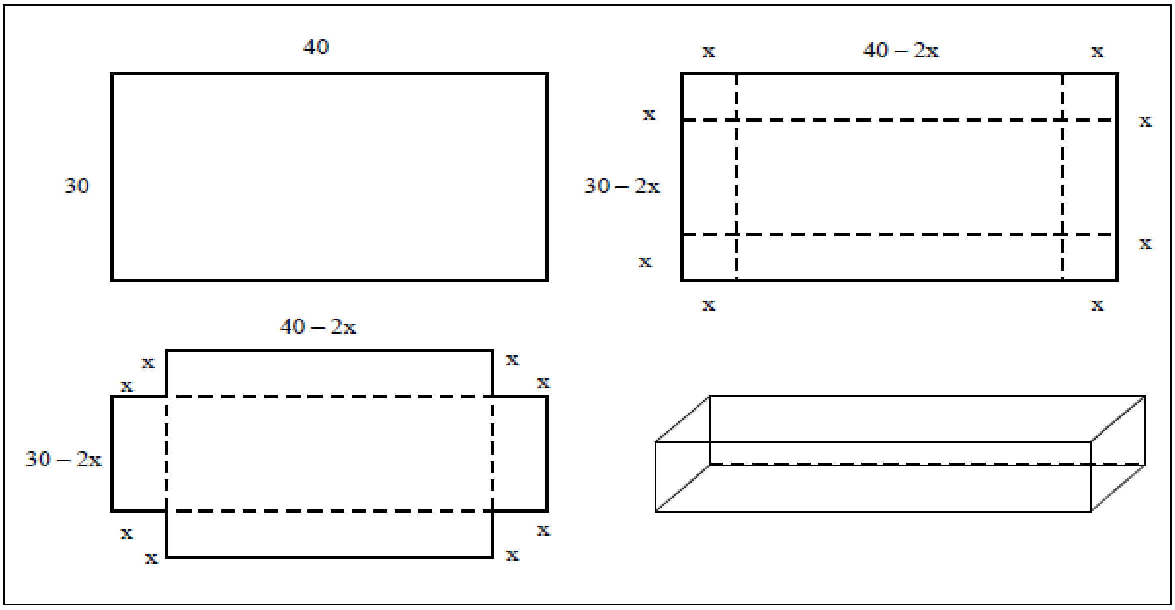


Figura 1. Modelo geométrico del problema

b) Condición de la profundidad de la caja. Como las dimensiones de la caja son longitudes, entonces se deben cumplir las condiciones:

La profundidad debe ser x

El largo debe ser $40 - 2x$,

El ancho debe ser $30 - 2x$,

Para que se cumplan las tres condiciones.

c) Modelo matemático.

El volumen de la caja se encuentra multiplicando sus dimensiones, es decir,

$V(x) = x(40-2x)(30-2x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

d) Registro tabular.
Evalúa la profundidad, el largo, el ancho y completa los datos restantes de la tabla 1.

Profundidad	Largo	Ancho	Volumen
x	$40-2x$	$30-2x$	$x(40-2x)(30-2x)$
0	40	30	0
1			
2	36	26	1872
3		24	2448
4	32		2816
5	30	20	
6	28	18	3024
7			
8	24	14	2688
9		12	2376
10	20	10	2000
11	18		1584
12	16	6	
13	14	4	728
14			
15	10	0	0

Tabla 1. Registro tabular de las dimensiones y volumen de la caja.

e) La Gráfica de la función volumen (Figura 2)

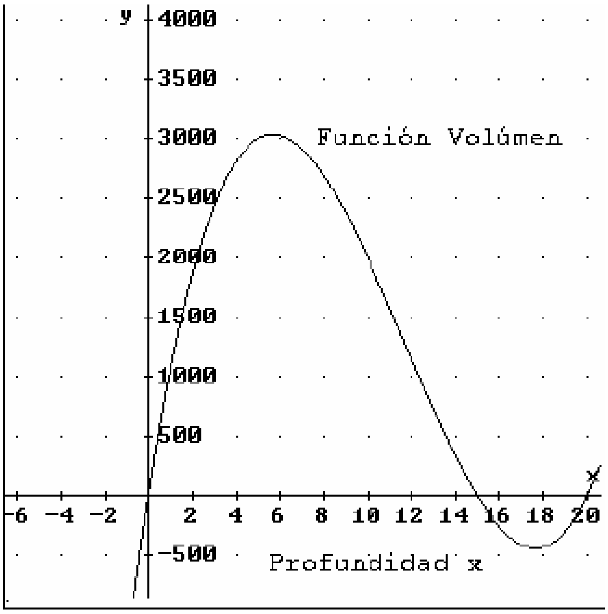


Figura 2. Gráfica de la función volumen de la caja

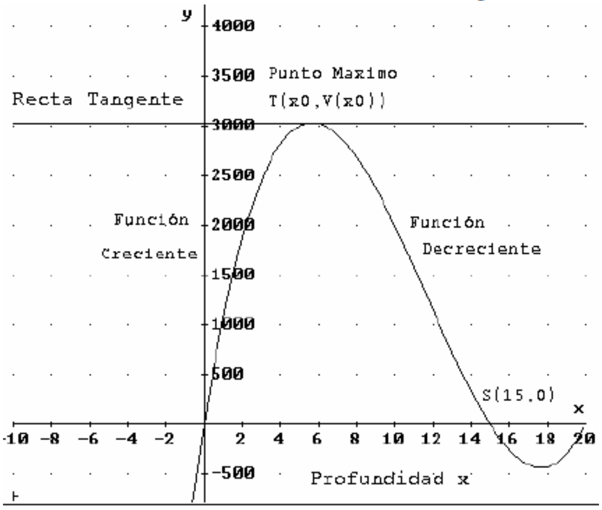


Figura 3. Recta tangente paralela al eje de las abscisas

¿Qué significa encontrar el máximo volumen de la caja?

____

Significa determinar la profundidad *x* de la caja que da el volumen máximo de la misma. Geométricamente significa encontrar la coordenada *x* para la cual la gráfica tiene un máximo. Para hacer esto de manera precisa encontraremos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto máximo, como se presenta en la figura 3.

f) Interpretación de la gráfica para el volumen máximo.

El punto T(x_0 , v(x_0)) es el máximo de la función volumen, luego a la izquierda de T la función es creciente ya que para $x_1 < x_2$, se tiene que f(x_1) < f(x_2), a la derecha del punto T entre los puntos T y S, la función es decreciente, ya que para $x_1 < x_2$, se tiene que f(x_1) > f(x_2). Además, de la figura 2 observamos que la condición para que la función alcance su máximo, la pendiente de la recta tangente en el punto de tangencia T debe ser v'(*x*) = 0 (derivada de la función o razón de cambio instantánea).

Con la información dada, responde las siguientes preguntas:

¿Cómo es el signo de la derivada a la izquierda del punto máximo? _______________

¿Cómo es el signo de la derivada entre los puntos T y S? ___________________

De acuerdo, el signo de la derivada a la izquierda del punto máximo es positivo, y es negativo entre los puntos T y S. Por lo que podemos establecer las condiciones del primer criterio de la derivada para calcular máximos y mínimos de funciones:

1. Determinar la derivada v'(*x*) de la función $v(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$.
2. Resolver la ecuación v'(*x*) = 0, para determinar los valores críticos de la función candidatos para obtener los máximos o mínimos de la función.
3. Analizar el signo de la derivada alrededor de cada uno de los valores críticos, primero para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico, en caso contrario, la función tiene un mínimo para ese valor crítico. Cuando el signo no cambia, la función no tiene máximo ni mínimo para ese valor crítico considerado.
4. Calcular los valores máximos y mínimos de la función al evaluarla en los valores críticos que dan los valores máximos o mínimos.

g) Aplicando el criterio de la primera derivada para resolver el problema.

1. Aplica las fórmulas de la derivación y determina la derivada de la función volumen

$v(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$, la derivada es $v'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$.

2. Resuelve la ecuación f'(*x*) = 0, para determinar los valores críticos de la función, es decir, las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función volumen.

$12x^2 - 280x + 1200 = 0$, para resolver la ecuación cuadrática, utilizamos la ecuación general de segundo grado, es decir,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$, donde a = 12, b = - 280 y c = 1200.

$$x = \frac{-(-280) \pm \sqrt{(-280)^2 - 4(12)(1200)}}{2(12)} \quad = \quad x = \frac{280 \pm \sqrt{20800}}{24}$$

$$x1 = \frac{280 + 144.222051}{24} = 17.67591879 \quad \text{y} \quad x2 = \frac{280 - 144.222051}{24} = 5.657414542$$

Los valores x_1 y x_2 son los valores buscados, sin embargo, x_1 no lo consideramos dado que su valor rebasa el rango de la profundidad de la caja.

3. Analiza el signo de la derivada alrededor de los valores críticos.
Para el valor crítico x_2 = 5.657414542, consideremos los valores x = 5 y 6. Por lo que
v'(5) = 12(5)^2 – 280(5) + 1200 = 300 – 1400 + 1200= 100 > 0.
Por lo que v'(6) = 12(6)^2 – 280(6) + 1200 = 432 – 1680 + 1200= -48 < 0.
Como el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, concluimos que la función tiene un máximo para el valor crítico x = 5.657414542.
4. Calcular el valor máximo de la función.
Máximo = v(5.657414542) = 4(5.657414542)^3 – 140(5.657414542)^2 + 1200(5.657414542) = 3032.302466 cm3.

h) Aplicando el criterio de la segunda derivada para resolver el problema:
Sabemos que cuando una función es creciente su derivada es positiva y cuando es decreciente su derivada es negativa.
En este sentido, consideremos la función derivada v'(x) = 12 x^2 – 280 x + 1200 y elaboremos una tabla que contenga los valores con los datos de la profundidad que se muestran en la tabla 2.

De la tabla 2, observamos que la función derivada es decreciente desde 0 hasta el punto S, por lo que el signo de la derivada de la función derivada (o sea la segunda derivada) es negativo, es decir, v''(x) < 0, en cambio, la función derivada es creciente desde el punto S hasta +∞, luego el signo de la segunda deriva es positiva o sea v''(x) > 0.

Podemos establecer las condiciones del segundo criterio de la derivada para calcular máximos y mínimos de funciones:

1. Determinar la derivada v'(x) de la función v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

2. Resolver la ecuación v'(x) = 0, para determinar los valores críticos de la función candidatos para obtener los máximos o mínimos de la función.

3. Hallar la segunda derivada.

4. Sustituir en la segunda derivada v''(x), en lugar de la profundidad, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el signo de la segunda derivada es negativo, la función tiene un máximo para ese valor crítico, en caso contrario, la función tiene un mínimo para ese valor crítico. Cuando v''(x) = 0, no es aplicable el criterio, pero puede ser resuelto aplicando el primer criterio.

5. Calcular los valores máximos y mínimos de la función al sustituir en la función v(x) los valores críticos.

6. Aplicando el segundo criterio de la derivada para la resolución del problema:

1. Determinamos la primera derivada de la función v(x) = $4x^3 - 140x^2 + 1200x$, cuyo resultado es

v'(x) = $12x^2 - 280x + 1200$

2. Resolvemos la ecuación v'(x) = 0, es decir, $12x^{2} - 280x + 1200 = 0$, para determinar los valores críticos de la función, la solución de acuerdo al criterio de la primera derivada es x_2 = 5.657414542.

3. Hallamos la segunda derivada de la función volumen, cuyo resultado es
v''(x) = $24x - 280$.

4. Sustituimos el valor crítico 2 x = 5.657414542 en la segunda derivada, es decir,
v''(5.657414542) = 24(5.657414542) – 280 = 135.777949 – 280 = -144.222051 < 0, por lo que la función v(x) tiene un máximo en el valor crítico en x = 5.657414542.

5. Máximo = v(5.657414542)
= $4(5.657414542)^3 - 140(5.657414542)^2 + 1200(5.657414542)$
= 3032.302466 cm^3.

Por lo que las dimensiones de la caja que dan el máximo volumen se presentan en la tabla 3.

Profundidad	Largo	Ancho	Volumen
x	$40-2x$	$30-2x$	$x\ (40-2x)(30-2x)$
5.657414542	28.68517092	18.68517092	3032.302466

Tabla 3. Dimensiones de la caja y volumen máximo.

Ejemplo. Construir la gráfica de la función $f\ (x) = x^3 - 9\ x^2 + 24\ x – 7$, especificando:

A) Puntos máximos, mínimos y de inflexión.

B) Concavidades.

C) Trazado de la gráfica de la función.

Solución con el criterio de la segunda derivada.

1. Encontrando la primera derivada de la función $f\ (x) = x^3 - 9\ x^2 + 24\ x – 7$.

   La derivada de la función es $f'(\ x\ ) = 3\ x^2 - 18x + 24$

2. Resolviendo la ecuación $f'(\ x\ ) = 0$, para determinar los valores críticos de la función, es decir, las abscisas de los puntos máximos y mínimos de la función. Por lo que:

$f'(\ x\ ) = 3\ x^2 - 18x + 24 = 3\ (\ x^2 – 6x + 8) = (\ x - 4)\ (\ x – 2) = 0$, como el producto de dos factores es cero, alguno es cero, resultando $x – 4 = 0$ y $x – 2 = 0$, obteniendo los valores críticos de la función $x = 4$ y $x = 2$.

3. Encuentra la segunda derivada de la función $f\ (x)$ y resuelve la ecuación $f''(\ x\ ) = 0$, para determinar las abscisas de los puntos de inflexión.

La segunda derivada es $f''(\ x\ ) = 6\ x – 18$, al resolver la ecuación $f''(\ x\ ) = 0$ se tiene que $6\ x – 18 = 6\ (\ x – 3) = 0$, por lo que $x – 3 = 0$, donde $x = 3$, es el valor solicitado.

4. Analizando los signos de la segunda deriva para los valores $x= 4$ y $x= 2$

Si el signo de la segunda derivada es negativa se tiene un máximo y la gráfica de la función es cóncava hacia abajo, en caso contrario se tiene un mínimo y es cóncava hacia arriba.
Al sustituir el valor crítico $x = 2$ en la segunda derivada, se obtiene $f''(2) = 6(2) – 18 = 12 – 18 = -6 < 0$, por lo que la función tiene un valor máximo y es cóncava hacia abajo. Al sustituir el valor crítico $x = 4$ en la segunda derivada, se obtiene $f''(4) = 6(4) – 18 = 24 – 18 = 6 > 0$, por lo que la función tiene un valor mínimo y es cóncava hacia arriba.

5. Sustituyendo en la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ los valores críticos y en la abscisa del punto de inflexión, para determinar, el máximo, mínimo y punto de inflexión, tal como se especifica a continuación:

Máximo = *f* (2) = (2)3 – 9(2)2 + 24(2) – 7 = 8 – 36 + 48 – 7 = 13.

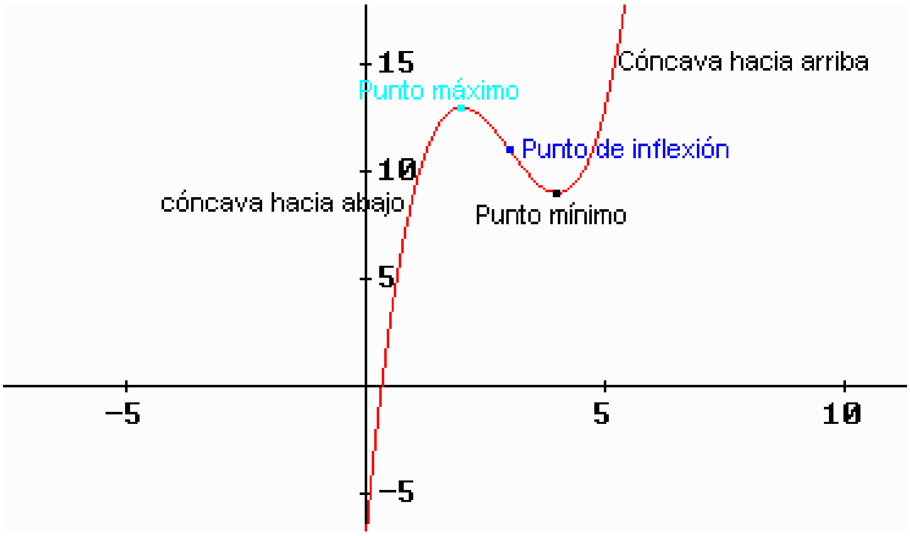
Punto de inflexión = *f* (3) = (3)3 – 9(3)2 + 24(3) – 7 = 27 – 81+ 72 – 7 = 11.

Mínimo = *f* (4) = (4)3 – 9(4)2 + 24(4) – 7 = 64 – 144 + 96 – 7 = 9.

Sustituye algunos valores a la izquierda del valor crítico $x = 2$ y a la derecha del valor crítico $x = 4$ en la función *f* (*x*) = *x* 3 - 9 *x* 2 + 24 *x* – 7, para obtener otros puntos adicionales para un mejor trazado de la gráfica.

7. Construye la gráfica de la función. La gráfica debe ser como la mostrada en la figura 4.

Gráfica de la función *f* (*x*) = *x* 3 - 9 *x* 2 + 24 *x* – 7.



Ver: https://www.youtube.com/watch?v=Z_0gbPW-xYI&list=PLNQqRPuLTic8ezNX2-usIdIPxX2eMrbZL

https://www.youtube.com/watch?v=Q9gKnHD_-0A

SESIÓN 4. Realiza los ejercicios

Actividad de Aprendizaje 2 Bloque 3 Sem: V

Nombre: ________________________________ **Grupo:** _________ **Fecha:** _____________

Contenidos	Máximos, mínimos absolutos. creciente, decreciente Segunda derivada
Competencias Disciplinares	1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Atributos de las competencias genéricas	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.(Atributo: 4.1) 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6) 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3) 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1) 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3

1. Encuentra dos números enteros positivos, cuyo producto sea 200, y la suma del primero más el doble del segundo sea mínima.

2. Encuentra dos números enteros positivos, cuya suma sea 60 y el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

3. A un impresor le dan instrucciones para obtener 300 cm² de impresión por página. Los márgenes superior e inferior deben tener 1.5 cm y 2 cm en cada lado de la página. ¿Cuáles serán las dimensiones de la página si quiere utilizar una mínima cantidad de papel?

4. El área de un terreno es de 4800 m²; conociendo que en el interior queda un jardín con márgenes superior e inferior de 8 m, y que los márgenes laterales son de 5 m, calcula las dimensiones de la superficie exterior para que el área del jardín sea máxima.

5. Se desea cercar un campo rectangular de 6000 m² de área, y dividirlo en dos mediante otra cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. La cerca central cuesta $100.00 por metro lineal y el resto de la cerca cuesta $150.00 por metro lineal. Encuentra las dimensiones que debe tener el terreno para que el costo de la cerca sea mínimo.

6. Se quiere construir una caja con una pieza cuadrada de aluminio de 144 cm² de área, de sus esquinas se cortan cuadrados iguales y se doblan sus lados. ¿De qué medida deberán cortarse los cuadros en las esquinas para que el volumen de la caja sea máximo?

7. Una pieza larga y rectangular de lámina de 80 cm de ancho va a convertirse en un canal para agua cuando se doblan hacia arriba dos de sus aristas, hasta formar ángulos de 90° con la base. ¿De qué medida deberán ser los dobleces para que el canal tenga una capacidad máxima?

8. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentra las dimensiones de la ventana que permitan pasar una mayor cantidad de luz. El perímetro de la ventana es de 6 m.

9. Se va a partir un alambre de 24 cm de largo en dos pedazos, uno de los pedazos se dobla para formar un cuadrado, y el otro para formar un círculo. ¿Cómo debe partirse el alambre para que el área combinada de las dos figuras sea: *a*) mínima, *b*) máxima?

Fuente: Martínez A. Calculo diferencial. Mc. Graw Hill

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	**LISTA DE COTEJO Bloque 3**	**ADA 2 Valor: 25 puntos**
GRADO y GRUPO:	**FECHA:**	

Elemento	Valor en pts.	Valor alcanzados	Observaciones
a. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. b. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente c. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA d. El nombre del archivo será CalDif_B3_ADA 2_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B3_ADA2_Equipo3 e. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	1		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	0.5		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	0.5		
Contenido			
Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver problemas de optimización usando la primera derivada y segunda derivada	21		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	1		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	1		
Total	**25**		

Nombre del Equipo:	Nombre del Representante:

Integrantes del equipo	Firma de conformidad con el resultado
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	Preformal 0-59	Receptivo 60-69	Resolutivo 70-79	Autónomo 80-89	Estratégico 90-100

METACOGNICIÓN

Excelente = Logré el aprendizaje de manera independiente.

Bueno = Necesité ayuda para construir mi aprendizaje.

Regular = Fue difícil el proceso de aprendizaje y lo logré parcialmente

<table>
<tr><td></td><td>Criterios</td><td colspan="3">Niveles de desempeño</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Excelente</td><td>Bueno</td><td>Regular</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Procedimental</td><td>Aplica adecuadamente las reglas de derivación para la primera derivada</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Determina los puntos críticos</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Aplica adecuadamente las reglas de derivación para la segunda derivada</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Determina los puntos de inflexión</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Determina los intervalos crecientes y decrecientes</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Determina la concavidad de la función</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Encuentra el máximo o mínimo relativo de la función</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Actitudinal</td><td>Organizas tu horario de trabajo</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Organizas la información e investigas los temas</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Te interesas en ver los videos y las lecturas por el bien individual y colectivo</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Valoras el trabajo en equipo aportando y refutando ideas en la resolución de problemas.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cumples con las indicaciones dadas para el buen desarrollo de las actividades.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Buscas y sugieres soluciones a los problemas planteados.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

SEMANA 3: 13 AL 17 DICIEMBRE

PROYECTO INTEGRADOR

Resuelve los siguientes ejercicios de forma colaborativa:

I. Completa la tabla que a continuación se presenta, incluyendo la definición formal de cada concepto, su representación pictórica con algún ejemplo de la vida cotidiana y tu interpretación del concepto (explicarlo con tus propias palabras).

Concepto	Definición	Descripción formal y fórmula matemática	Representación pictórica (dibujo)	Interpretación del concepto (expresarlo con tus palabras)
Desplazamiento				
Velocidad				
Aceleración				

II. **Analiza cada caso y resuelve aplicando la primera o segunda derivada, según corresponda.**

1. Si la expresión que describe la distancia recorrida de un objeto es $S(t) = t^3 - 3t^2 - 12t$, con $t \geq 0$, determina:
   a) ¿En qué momento el objeto alcanza una velocidad de 3 m/s?
   b) La gráfica correspondiente.
   c) Los máximos y mínimos absolutos.
   d) Sus concavidades.

2. Considerando la función $S(t) = t^2 - 3$ determina la primera y segunda derivada de la función, e interpreta el comportamiento de cada una de las funciones.

3. Si la expresión que describe la velocidad de un objeto es $V(t) = t^2 - t - 2$, siempre y cuando $t \geq 0$. Determine:
   a) ¿En qué momento es cero la aceleración?
   b) La gráfica correspondiente.
   c) Los máximos y mínimos absolutos.
   d) Sus concavidades.

4. Si la expresión que describe el movimiento de un objeto es $S(t) = 6t^3 - 18t^2 - 49t$, siempre y cuando $t \geq 0$, determina:
   a) ¿En qué momento el objeto alcanza una velocidad de 5 m/s?
   b) ¿En qué momento es cero la aceleración?

5. La función que describe la velocidad de una motocicleta está dada por $V(t) = t^2 - t - 1$, con $t \geq 0$, determina:
   a) ¿En qué momento la motocicleta tiene una aceleración igual a cero?
   b) La gráfica correspondiente.
   c) Los máximos y mínimos absolutos.
   d) Sus concavidades.

6. El movimiento de una partícula está dado por $S(t) = t^3 - 4t^2 - 8t$, para $t \geq 0$, determina, ¿en qué momento la partícula tiene una velocidad de 20 m/s?

7. Si la expresión que describe el movimiento de una montaña rusa en un parque de diversiones está dada por, $S(t) = t^3 - 2t^2 - t$, con $t \geq 0$, determina:
   a. ¿En qué momento la montaña rus alcanza una velocidad de 4 m/s?
   b. ¿En qué momento es cero la aceleración de la montaña rusa?

8. Completa la siguiente tabla según corresponda.
   Nota: agrega las leyendas respectivas a los ejes coordenados.

Función (distancia)	**Primera derivada (velocidad)**	**Segunda derivada (aceleración)**
$S(t) = t^3 - 4t^2 - 8t$		
Gráfica	Gráfica	Gráfica
Interpretación	Interpretación	Interpretación

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial	**LISTA DE COTEJO Bloque 3**	**PROYECTO INTEGRADOR PROBLEMARIO Valor: 50 puntos**
GRADO y GRUPO:	**FECHA:**	

Elemento	**Valor en pts.**	**Valor alcanzados**	**Observaciones**
f. El trabajo se entrega en tiempo y forma a través del representante del equipo. g. La entrega del documento se realiza a través del medio de la plataforma Schoology o del correo indicado por el docente h. La lista de cotejo se integrará en la parte final de la ADA i. El nombre del archivo será CalDif_B3_iNTEGRADORA_Equipo(#deequipo) Ejemplo: CalDif_B3_INTEGRADORA_Equipo3 j. El archivo esta ordenado y contiene las fotos nítidas de los ejercicios resueltos en hojas claras.	2		
Presenta una **portada** (logotipo, datos de la escuela, Título del trabajo, el criterio, integrantes del equipo, materia, nombre del profesor, grado, grupo y fecha de entrega).	1		
Formato: Utiliza la fuente de texto: Arial, tamaño de la fuente 12, interlineado 1.5, márgenes 2.5 cm (superior, inferior, derecho e izquierdo), sangría, texto justificado y con todas las hojas paginadas con excepción de la portada Se insertan las fotos de los ejercicios resueltos en hoja	1		
Contenido			
Utiliza los conceptos y presenta explicaciones o procedimientos al resolver problemas de optimización usando la primera derivada y segunda derivada	40		
Participación y actitudes			
Participan de manera colaborativa, honesta y responsable durante la elaboración de la actividad.	3		*En caso de plagio total o parcial la calificación es CERO.
Demuestran una actitud positiva con el profesor y sus compañeros durante el bloque.	3		
Total	**25**		

Nombre del Equipo:	Nombre del Representante:

Integrantes del equipo	Firma de conformidad con el resultado
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Niveles de dominio	Preformal 0-59	Receptivo 60-69	Resolutivo 70-79	Autónomo 80-89	Estratégico 90-100